Pannon Egyetem
Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

Digitális Technika

Több kimenetű logikai függvények grafikus, és számjegyes minimalizálása

Több kimenetű logikai függvények minimalizálása

Több kimenetű logikai függvények minimalizálása

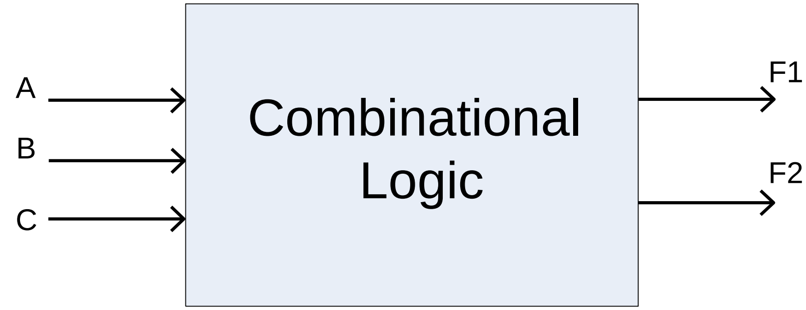
Vizsgált módszerek több kimenetre:

- A.) Grafikus: Karnaugh táblákkal
- B.) Számjegyes: Quine-McCluskey

A.) Grafikus minimalizálás

- Több kimenetű KH. egyszerűsítése: olyan, mintha kimenetenként egy-egy logikai függvénnyel írnánk le
- Külön-külön egyszerűsítve eljut(hat)unk a legegyszerűbb diszjunktív, vagy konjunktív logikai alakhoz,
  - azonban, mivel ugyanazon független (bemeneti) változókon értelmezettek → további **egyszerűsítésre** adódhat lehetőség

1. Példa:



- Legyen adott a következő 2-kimenetű, 3-bemenetű függvény:

$$F_1(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC = m_2 + m_3 + m_7$$

$$F_2(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC = m_3 + m_5 + m_7$$

- Alkalmazzuk a grafikus minimalizáláshoz a Karnaugh táblát külön-külön:

F1:

A \ BC	00	01	11	10
0	0_{0}	0_{1}	1_{3}	1_{2}
1 (A)	0_{4}	0_{5}	1_{7}	0_{6}

(C: columns 01, 11; B: columns 11, 10)

$$F_1(A,B,C) = \overline{A}B + BC$$

F2:

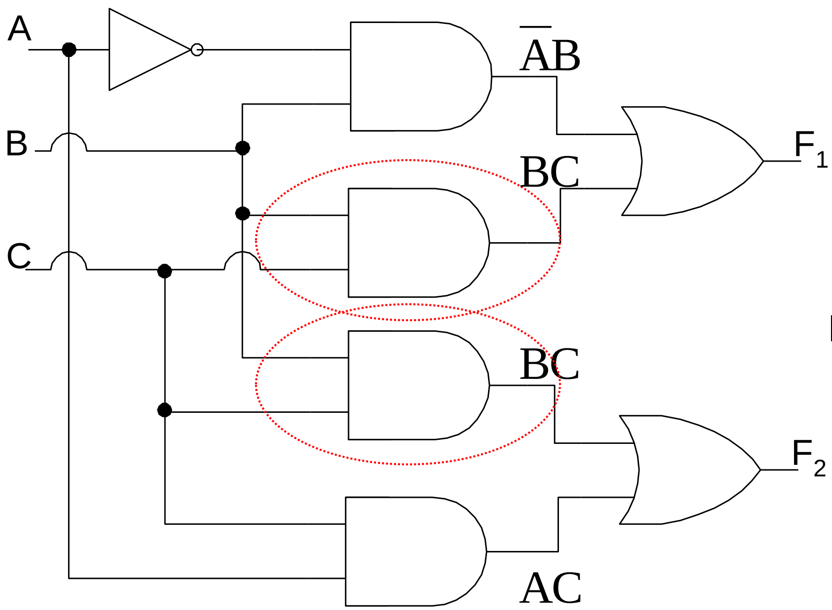
A \ BC	00	01	11	10
0	0_{0}	0_{1}	1_{3}	0_{2}
1 (A)	0_{4}	1_{5}	1_{7}	0_{6}

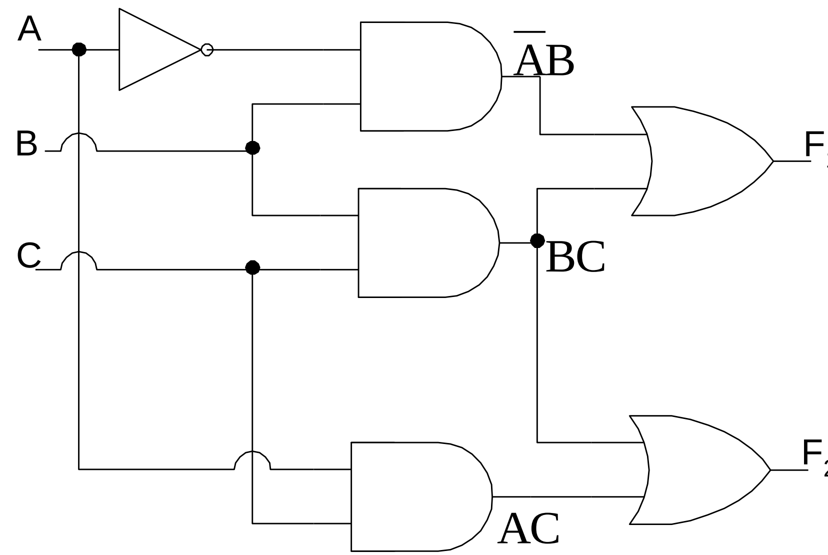
(C: columns 01, 11; B: columns 11, 10)

$$F_2(A,B,C) = AC + BC$$

'BC' közös prímimplikánsok

1. példa: Elvi logikai rajz





Kimeneti minimalizálással kapott elvi logikai rajz

$$F_1(A,B,C) = \overline{A}B + BC$$

$$F_2(A,B,C) = AC + BC$$

A közös 'BC' prímimplikáns egyszeri megvalósításával kapott elvi logikai rajz

1. Példa (folyt)

- Mivel a ‘BC’ közös prímimplikáns mindkét (F1, F2) logikai függvényben szerepel, felesleges mindkét elvi logikai kapcsolásban kétszer megvalósítani.
- Ezért a minimalizálási eljárást módosítani kell!
  - Cél: közös prímimplikánsok meghatározása
  - Előző példa alapján képzett szorzatfüggvény

$F_1 \cdot F_2$

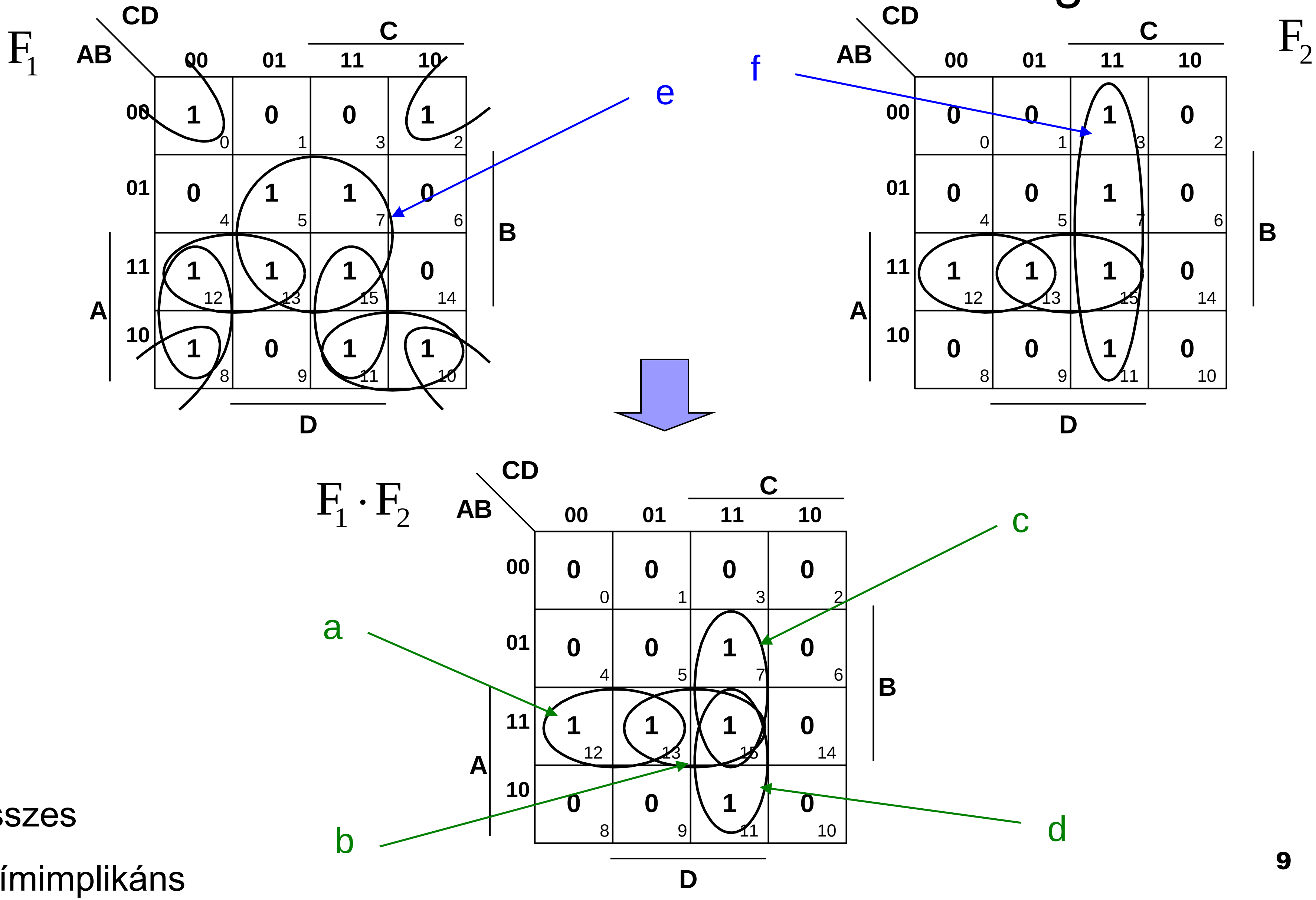
A \ BC	00	01	11	10
0	0 (0)	0 (1)	1 (3)	0 (2)
1	0 (4)	0 (5)	1 (7)	0 (6)

$$F_1 \cdot F_2 = BC$$

DEF: Közös/nem-közös prímimplikánsok meghatározása

- Alapgondolat: a két (több) függvény **közös prímimplikánsai** (amelyek közösen lefedik a mintermeket) biztosan *prímimplikánsai* lesznek a két (több) függvény **szorzatának**.
  - Két függvénynél: $F_1 \times F_2 = 1$, ha $F_1 = 1$ és $F_2 = 1$
- Közös Karnaugh táblában: azokon a helyeken lesz ‘1’, ahol a mindkét (mindegyik) Karnaugh táblában is ‘1’ volt.
- A szorzatfüggvényben természetesen lehetnek **nem-közös prímimplikánsok** is (lásd köv: **Példa 2**), melyeket nem lehet figyelmen kívül hagyni a szorzatfüggvény optimális lefedéséhez.

2. Példa: Adottak a következő Karnaugh táblák



összes

prímimplikáns

2. Példa (folyt.) alapján:

Megállapítható, hogy:

- ***'a'*** prímimplikáns közös (**F_1**, és **F_2**-ben is pontosan így szerepel)
- ***'b'*** prímimplikáns nem közös (mivel **F_1**-ben nem prímimplikánsként, hanem az **'e'** jelű prímimplikánsnak csak egy **részeként**, azaz tovább egyszerűsíthető szorzatként szerepel!)
- ***'c'*** prímimplikáns nem közös (mivel **F_1**-ben nem prímimplikánsként, hanem az ***'e'*** jelű prímimplikánsnak csak egy **részeként**, **F_2**-ben pedig az ***'f'*** prímimplikáns tartalmazásaként szerepel, azaz tovább egyszerűsíthető szorzatként szerepel!)
- ***'d'*** prímimplikáns nem közös (mivel **F_2**-ben nem prímimplikánsként, hanem az ***'f'*** jelű prímimplikánsnak csak egy **részeként** szerepel, azaz tovább egyszerűsíthető szorzatként szerepel!)

Több kimenetű függvény optimális lefedésének meghatározása

Figyelembe kell venni tehát:

- **Kimeneti függvények** prímimplikánsait, melyek lehetnek:
  - Közösek
  - Nem közösek
- Összes lehetséges **szorzatfüggvény** prímimplikánsait is.

3. Példa

- <u>Adottak</u>: n=4 bemenetű, 3 kimenetű K.H. Realizáljuk a legegyszerűbb kétszintű ÉS-VAGY (DNF) alakú elvi logikai rajzot! Egyszerűsítésként a *grafikus minimalizálást (Karnaugh táblákat)* alkalmazzuk!

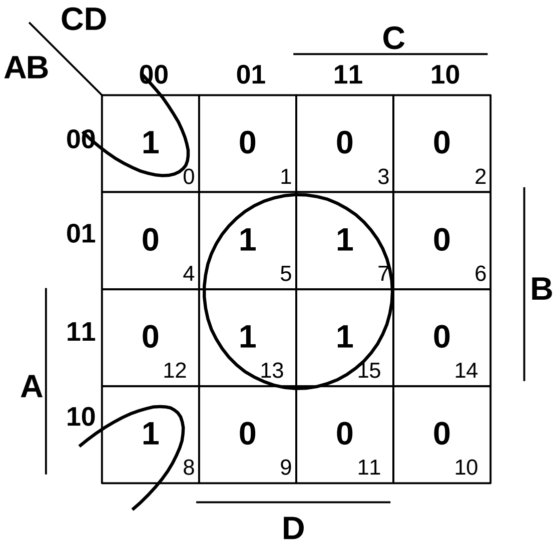
$$F^4{}_1(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,5,7,8,13,15)$$

$$F^4{}_2(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,5,8,10,14)$$

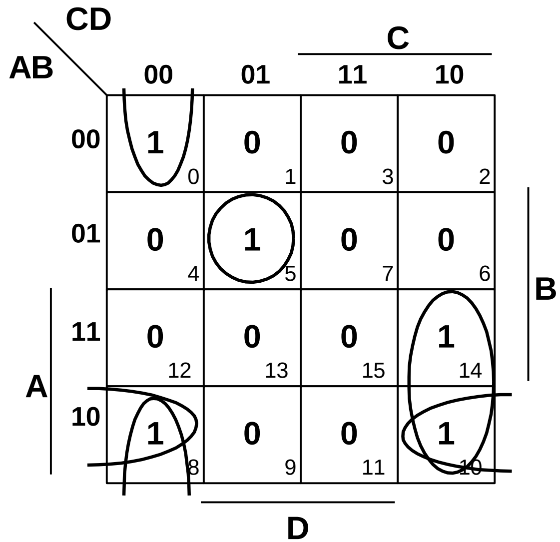
$$F^4{}_3(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,3,5,8,14)$$

3. Példa (folyt.) – I. lépés

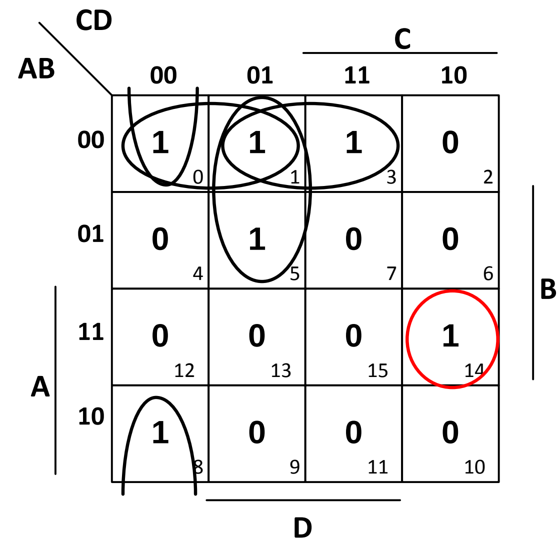
F_1



F_2



F_3



$$F_1 = BD + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$F_2 = AC\bar{D} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{D}$$

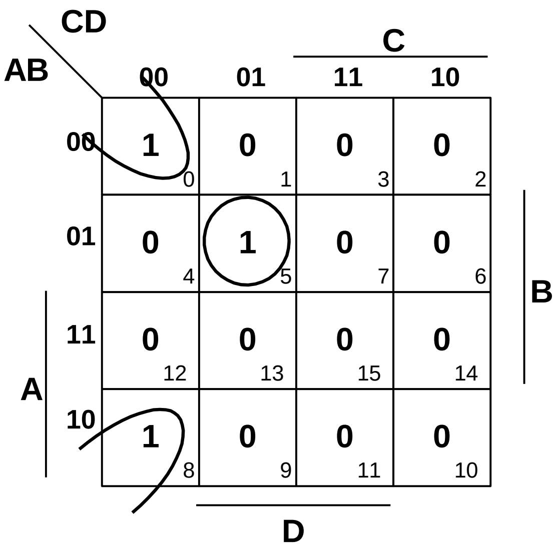
$$F_3 = \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC\bar{D}$$

Szorzat függvények előállítása összes lehetséges módon!

3. Példa (folyt.) – II. lépés

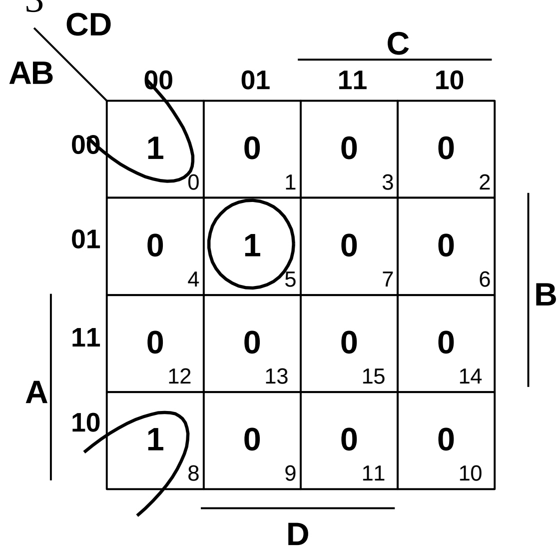
Összes lehetséges szorzatfüggvény Karnaugh táblái (összes lehetséges prímimplikáns képzése)

$F_1 \cdot F_2$



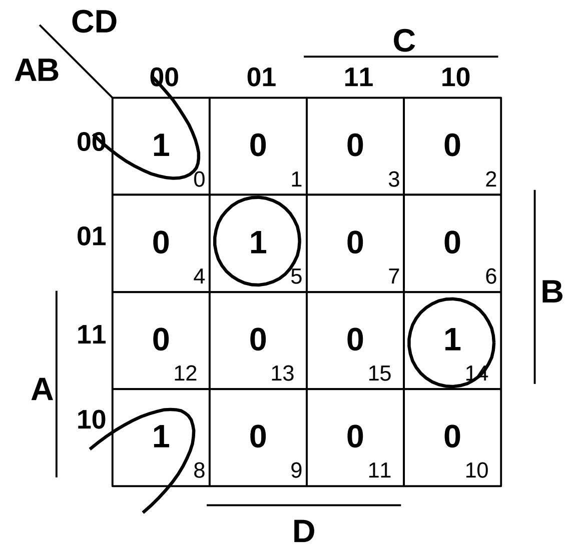
$F_1 \cdot F_2 = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$

$F_1 \cdot F_3$



$F_1 \cdot F_3 = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$

$F_2 \cdot F_3$



$F_2 \cdot F_3 = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + ABC\overline{D}$

Végül $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$ szorzat előállítása!

3. Példa (folyt.) – III. lépés

$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	0 $_{1}$	0 $_{3}$	0 $_{2}$
01	0 $_{4}$	1 $_{5}$	0 $_{7}$	0 $_{6}$
11	0 $_{12}$	0 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	1 $_{8}$	0 $_{9}$	0 $_{11}$	0 $_{10}$

C (columns 11, 10); B (rows 01, 11); A (rows 11, 10); D (columns 01, 11)

$$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D$$

Szorzatfüggvény prímimplikánsai

Optimális lefedéshez a szorzatfüggvények prímimplikánsait is figyelembe kell venni, de nehéz lehet áttekinteni a Karnaugh tábláikat.

→ Prímimplikáns táblát használunk leolvasásukhoz!

3. Példa: IV lépés – Prímimplikáns tábla

Kimeneti fgv / szorzat fgv.	Kimeneti fgvek.	F1						F2			!		F3					
	mintermek / Többkim. Prímimplik.	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$ABC\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$ABC\overline{D}$
F1	BD * a		x	x		x	x											
F2	$AC\overline{D}$ b										x	x						
	$A\overline{B}\,\overline{D}$ c									x	x							
F3	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ d												x	x				
	$\overline{A}\,\overline{C}D$ e													x		x		
	$\overline{A}\,\overline{B}D$ * f													x	x			
F2×F3	$ABC\overline{D}$ * g											x						x
F1×F2×F3	$\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ * h	x			x			x		x			x				x	
	$\overline{A}B\overline{C}D$ * i		x						x							x		

Táblázat kitöltésekor egy-egy többkimenetű prímimplikánssal kijelölt sornak abba a sorába kell '*'-ot tenni, amelyhez tartozó mintermeket az illető prímimplikáns tartalmazza → **lényeges prímimplikáns(ok)**
- van olyan minterm, amely oszlopa alatt csak egyetlen '**x**' szerepel, majd x kiemelhető

3. Példa (folyt.) – V. lépés

- Feladat: a többkimenetű prímimplikánsok készletéből azokat kiválasztani, amelyek a legegyszerűbb elvi logikai rajzot eredményezi.
  - Ehhez **‘S’** segédfüggvény felírása.

$$S = h\cdot(a+i)\cdot a\cdot h\cdot a\cdot a\cdot h\cdot i\cdot(c+h)\cdot(b+c)\cdot(b+g)\cdot(d+h)\cdot(d+e+f)\cdot f\cdot(e+i)\cdot h\cdot g =$$

$$= \underbrace{afghi\cdot}(a+i)\cdot(c+h)\cdot(\underline{b+c)\cdot}(b+g)\cdot(d+h)\cdot(d+e+f)\cdot(e+i) = \underset{\textbf{1)}}{\underline{afghi\textcolor{red}{c}}} + \underset{\textbf{2)}}{\underline{afghi\textcolor{red}{b}}}$$

Kiemelhető, mivel minden keletkező segédfüggvénybeli szorzatban szerepel.

A (b+c)-n kívül minden összeg elnyelődik, esetleg nem is kellett volna felírni a prímimplikáns táblából.

Többkimenetű függvény esetén azonban a legegyszerűbb kétszintű (ÉS-VAGY) elvi logikai rajz felírásához általában csak **PRÓBÁLGATÁSSAL** juthatunk el!

Mindkét alakot meg kell vizsgálni!

PRÓBÁLGATÁS

- A próbálgatás során csak a *legkevesebb tényezőt tartalmazó szorzatokat* vesszük figyelembe.
- A kiválasztott szorzatban az összes több kimenetű prímimplikáns közül azok szerepelnek, amelyeket az elvi logikai rajzban ÉS kapukkal valósítunk meg.
- Ezeknek az ÉS kapuknak a kimeneteit úgy kell VAGY kapuk bemeneteire vezetni, hogy a VAGY szinten a kapubemenetek száma az adott kiválasztással *minimális* legyen.

3. 1) Tekintsük az ‘afghic’ szorzatot

- **1)** Most az ‘***afghic’-***prímimplikáns készlettel kell az optimális lefedést magvalósítani (prímimplikáns tábla alapján leolvasva):

Kimenetenként felírt segédfüggvények:

$$s_1 = h\cdot(a+i)\cdot a\cdot h\cdot a\cdot a = h\cdot(a+i)\cdot a = ha$$

$$s_2 = h\cdot i\cdot(c+h)\cdot c\cdot g = hicg$$

$$s_3 = h\cdot f\cdot f\cdot i\cdot h\cdot g = hfig$$

Kimeneti függvények:

$$F_1 = h + a = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + BD$$

+ tag

$$F_2 = h + i + c + g = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$$

$$F_3 = h + f + i + g = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}B\overline{C}D + ABC\overline{D}$$

Próbálgatás után az F1,F2,F3 többkimenetű függvények realizálnak itt egy lehetséges elvi kapcsolási rajzot! (Arató könyv: 2.43. ábra – 78. oldal)

3. 2) Tekintsük az ‘afghib’ szorzatot

- **2)** Most pedig az ‘***afghib’*-**prímimplikáns készlettel kell az optimális lefedést magvalósítani (prímimplikáns tábla alapján leolvasva):

Kimenetenként felírt segédfüggvények:

$$s_1 = h \cdot (a+i) \cdot a \cdot h \cdot a \cdot a = h \cdot (a+i) \cdot a = ha$$

$$s_2 = h \cdot i \cdot h \cdot b \cdot (b+g) = hib$$

$$s_3 = h \cdot f \cdot f \cdot i \cdot h \cdot g = hfig$$

Kimeneti függvények:

$$F_1 = h + a = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + BD$$

$$F_2 = h + i + b = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AC\overline{D}$$

$$F_3 = h + f + i + g = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}B\overline{C}D + ABC\overline{D}$$

Próbálgatás után az F1,F2,F3 többkimenetű függvények realizálnak itt egy lehetséges elvi kapcsolási rajzot! (Arató könyv: 2.44. ábra – 79. oldal)

3. Példa: eredmény

- Összehasonlítva a prímimplikánsokkal kifejezett F1,F2,F3 kimeneti függvényeket, az látható, hogy
  - F1, ill. F3 függvények realizálásában nincs eltérés a két módszer (1) és (2) között.
  - Viszont F2 függvényben az (2) módszer esetén egy taggal csökken a prímimplikánsok száma
- Következtetés: két módszer nem különbözik ÉS kapuk szintjén, viszont a VAGY kapuk szintjét tekintve **a (2) módszer optimálisabb:**
  - Egy kapubemenetet takarítunk meg (VAGY szinten).

B.) Számjegyes minimalizálás (Quine-McCluskey)

- **Több kimenet** esetén az eljárást úgy kell kiegészíteni, hogy alkalmas legyen a *több kimenetű prímimplikánsok* előállítására.
- Ehhez minden mintermről, szorzatról vagy végső esetben prímimplikánsról tudni kell, hogy a kimeneti függvények közül melyikben fordult elő (*jelző karakter alkalmazása* szükséges).

Emlékeztető: Szomszédosság 3 feltétel teljesülése

- Bizonyítható, hogy az A.), B.) és C.) (**szükséges, de nem elégséges**) feltételek együttes teljesülése esetén lesz pontosan a két minterm **szomszédos**:
  - A.) indexek különbsége 2^n hatványa, és
  - B.) bináris súlyuk különbsége 1, és
  - C.) a nagyobb bináris súlyú minterm decimális indexe is nagyobb.

Több kimenetű függvények számjegyes minimalizálása

- Kiindulásként az összes megadott kimeneti függvény összes mintermjét - *az egyváltozós Quine-McCluskey módszernél megismert módon* - kell hogy csoportosítsuk I. oszlopban, azaz **bináris súlyok** szerint.
- **Jelzőkaraktert** kell rendelni minden mintermhez:
  - Hozzárendeli a mintermeket az adott kimeneti függvény(ek)hez
  - Bináris számjegy: ’0’ – „nem tartalmazza” / ’1’ – „tartalmazza”
  - Azokon a *helyértéken* ’1’ értékű, ahol a kimeneti függvény tartalmazza az adott mintermet.

1. Példa: Több kimenetű függvény Quine-McCluskey minimalizálása

- Adottak a következő kimeneti függvények (4 bemenet, 2 kimenet):

$$F^4_1(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,3,5,10,11,14,15)$$

TSH!

$$F^4_2(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,6,7,8,10,11,12,14,15)$$

1. Példa (folyt.) **I./a lépés**

- **I. oszlop:** Csoportosítás bináris súlyuk szerint:
  - ahol a kimeneti értékük ’1’-s volt.

$$F^4{}_1(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,3,5,10,11,14,15)$$

$$F^4{}_2(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,6,7,8,10,11,12,14,15)$$

Minterm(dec)	Bináris alak	
0	0000	[#0 bináris súly]
1	0001	[#1 bináris súly]
8	1000	
3	0011	[#2 bináris súly]
5	0101	
6	0110	
10	1010	
12	1100	
7	0111	[#3 bináris súly]
11	1011	
14	1110	
15	1111	[#4 bináris súly]

bináris súly szerinti csoportképzések: vonallal elválasztva

1. Példa (folyt.) **I./b lépés**

- **I. oszlop. Jelzőkarakterek ('0', '1') helyértékenként való megadása**
  - '1', ahol a kimeneti függvény tartalmazza az adott mintermet,
  - '0', egyébként.

Minterm(dec)	F_1	F_2	
0	1	1	√
1	1	1	√
8	0	1	√
3	1	0	√
5	1	0	√
6	0	1	√
10	1	1	√
12	0	1	√
7	0	1	√
11	1	1	√
14	1	1	√
15	1	1	√

jelzőkarakterek

$$F^4{}_1(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,3,5,10,11,14,15)$$

$$F^4{}_2(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,1,6,7,8,10,11,12,14,15)$$

1. Példa (folyt.) **II. lépés**

II. Oszlop: Összes létező szomszédos **kételemű** lefedő tömb (hurok) összevonása (I. oszlopból)

Minterm(dec. kül.)	F_1	F_2 (szorzat)
0,1 (1)	**1**	**1**
0,8 (8)	**0**	**1**
1,3 (2)	**1**	**0**
1,5 (4)	**1**	**0**
8,10 (2)	**0**	**1**
8,12 (4)	**0**	**1**
~~**3,7 (4)**~~	~~**0**~~	~~**0**~~
3,11 (8)	**1**	**0**
~~**5,7 (2)**~~	~~**0**~~	~~**0**~~
6,7 (1)	**0**	**1**
6,14 (8)	**0**	**1**
10,11 (1)	**1**	**1**
10,14 (4)	**1**	**1**
12,14 (2)	**0**	**1**
7,15 (8)	**0**	**1**
11,15 (4)	**1**	**1**
14,15 (1)	**1**	**1**

jelzőkarakterek

II. Oszlopot képezve: csak akkor vonható össze két szomszédos minterm az I. oszlop alapján, (vagy két szorzat a további oszlop(ok)ban), ha a jelzőkaraktereikben van <u>legalább egy olyan helyérték, ahol mindkét jelzőkarakter ’1’.</u>

Nem végezhetjük el azokat az összevonásokat sem, ahol az összes jelzőkarakter értéke ’0’.

1. Példa (folyt.) **III. lépés**

III. Oszlop: Összes létező szomszédos **négyelemű** lefedő tömb (hurok) összevonása (II. oszlopból)

Minterm(dec. kül.)	F_1	F_2 (szorzat)	
0,1 (1)	**1**	**1**	**a**
0,8 (8)	**0**	**1**	**b**
1,3 (2)	**1**	**0**	**c**
1,5 (4)	**1**	**0**	**d**
8,10 (2)	**0**	**1**	√
8,12 (4)	**0**	**1**	√
~~**3,7 (4)**~~	~~**0**~~	~~**0**~~	
3,11 (8)	**1**	**0**	**e**
~~**5,7 (2)**~~	~~**0**~~	~~**0**~~	
6,7 (1)	**0**	**1**	√
6,14 (8)	**0**	**1**	√
10,11 (1)	**1**	**1**	√
10,14 (4)	**1**	**1**	√
12,14 (2)	**0**	**1**	√
7,15 (8)	**0**	**1**	√
11,15 (4)	**1**	**1**	√
14,15 (1)	**1**	**1**	√

prímimplikáns betűzések

Minterm(dec. kül.)	F_1	F_2 (szorzat)	
8,10,12,14 (2,4)	**0**	**1**	**f**
6,7,14,15 (1,8)	**0**	**1**	**g**
10,11,14,15 (1,4)	**1**	**1**	**h**

III. oszlop

III alapján → II. –ben csak a jelzőkaraktereikben teljesen megegyező mintermeket (prímimplikáns tagokat) lehet kipipálni!

1. Példa: IV lépés – Prímimplikáns tábla

Kimeneti fgv / szorzat fgv.	Kimeneti fgvek.	F1								F2									
	mintermek / Többkim. Prímimplik.	0	1	3	5	10	11	14	15	0	1	6	7	8	10	11	12	14	15
F1 × F2	0,1 (1) a *	x	x							x	x								
	10,11,14,15 (1,4) h *					x	x	x	x						x	x		x	x
F1	1,3 (2) c		x	x															
	1,5 (4) d *		x		x														
	3,11 (8) e			x			x												
F2	0,8 (8) b									x				x					
	6,7,14,15 (1,8) g *											x	x					x	X
	8,10,12,14 (2,4) f *													x	x		x	x	

Táblázat kitöltésekor egy-egy többkimenetű prímimplikánssal kijelölt sornak abba a sorába kell '*'-ot tenni, amelyhez tartozó mintermeket az illető prímimplikáns tartalmazza → **lényeges prímimplikáns(ok)**
- van olyan minterm, amely oszlopa alatt csak egyetlen '**x**' szerepel

Segédfüggvény felírása (S)

- Ebben a feladatban ránézésre nem volt megállapítható, ezért kell a segédfüggvénnyel felírt alak:

Legegyszerűbb alak a prímimplikánsból „lefedi” a tagot

$$'1' = S = a \cdot (a+d+c) \cdot (c+e) \cdot d \cdot h \cdot h \cdot h \cdot h \cdot (a+b) \cdot a \cdot$$

$$\cdot g \cdot g \cdot (b+f) \cdot (h+f) \cdot h \cdot f \cdot (h+f+g) \cdot (h+g) =$$

Beszorzás elvégzése

$$= a \cdot d \cdot h \cdot f \cdot g \cdot (c+e) = adhfg\underline{c} + adhfg\underline{e}$$

Legegyszerűbb DNF alak

A (c+e)-n kívül minden összeg elnyelődik, nem kötelező felírni a prímimplikáns táblából.

1.) 2.)

Többkimenetű függvény esetén azonban a legegyszerűbb kétszintű (ÉS-VAGY) elvi logikai rajz felírásához, csak **PRÓBÁLGATÁSSAL** juthatunk el! Mindkét alakot meg kell vizsgálni.

1. 1.) Tekintsük az ‘adhfgc’ szorzatot

- **1)** Most az ‘***adhfgc’***-prímimplikáns készlettel kell az optimális lefedést magvalósítani (prímimplikáns tábla alapján leolvasva):

Kimenetenként felírt segédfüggvények:

$$s_1 = a \cdot (a + c + d) \cdot c \cdot d \cdot h \cdot h \cdot h \cdot h = a \cdot c \cdot d \cdot h \Rightarrow acdh$$

$$s_2 = (a + b) \cdot a \cdot g \cdot g \cdot f \cdot (f + h) \cdot h \cdot (b + f) \cdot (h + g + f) \cdot (h + g) =$$

$$= a \cdot g \cdot f \cdot h \Rightarrow afgh$$

$$\Downarrow$$

Kimeneti függvények:

$$F_1 = a + c + d + h = ?$$

$$F_2 = a + f + g + h = ?$$

1. 1.) Prímimplikánsok VAGY kapcsolatából képzett F1,F2 kétkimenetű függvények megadása

ABCD

- a **0,1 :** $\left.\begin{matrix}0000\\0001\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
- c **1,3:** $\left.\begin{matrix}0001\\0011\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A}\,\overline{B}D$
- d **1,5:** $\left.\begin{matrix}0001\\0101\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A}\,\overline{C}D$
- h **10,11,14,15:** $\left.\begin{matrix}1010\\1011\\1110\\1111\end{matrix}\right\} \Rightarrow AC$
- f **8,10,12,14:** $\left.\begin{matrix}1000\\1010\\1100\\1110\end{matrix}\right\} \Rightarrow A\overline{D}$
- g **6,7,14,15:** $\left.\begin{matrix}0110\\0111\\1110\\1111\end{matrix}\right\} \Rightarrow BC$

MEGJ: A mintermen belüli, adott helyértéken lévő ‘0’-’1’ kombinációk kiesnek!

Kapott kimeneti függvények:

$$F_1 = a + c + d + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}\,\overline{C}D + AC$$

$$F_2 = a + f + g + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{D} + BC + AC$$

Próbálgatás után az F1,F2 többkimenetű függvények realizálnak itt egy lehetséges elvi kapcsolási rajzot! (Arató könyv: 2.46. ábra – 85. oldal)

1. 2.) Tekintsük az ‘adhfg<u>e</u>’ szorzatot

- **2.)** Most az ‘***adhfge’*-**prímimplikáns készlettel kell az optimális lefedést magvalósítani (prímimplikáns tábla alapján leolvasva):

Kimenetenként felírt segédfüggvények:

$$s_1 = a \cdot (a+d) \cdot e \cdot d \cdot h \cdot (h+e) \cdot h \cdot h = a \cdot e \cdot d \cdot h \Rightarrow \text{adeh}$$

$$s_2 = (a+b) \cdot a \cdot g \cdot g \cdot f \cdot (f+h) \cdot h \cdot (b+f) \cdot (h+g+f) \cdot (h+g) =$$

$$= a \cdot g \cdot f \cdot h \Rightarrow \text{afgh}$$

Kimeneti függvények:

$$F_1 = a+d+e+h = ?$$

$$F_2 = a+f+g+h = ? \longleftarrow$$ Ugyanaz, mint 1)-ben!!!

1. 2.) Prímimplikánsok VAGY kapcsolatából képzett F1,F2 kétkimenetű függvények megadása

	ABCD	
a 0,1 :	0000 0001	⇒ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
e 3,11:	0011 1011	⇒ $\overline{B}CD$
d 1,5:	0001 0101	⇒ $\overline{A}\,\overline{C}D$
h 10,11,14,15:	1010 1011 1110 1111	⇒ AC
f 8,10,12,14:	1000 1010 1100 1110	⇒ $A\overline{D}$
g 6,7,14,15:	0110 0111 1110 1111	⇒ BC

MEGJ: A mintermen belüli, adott helyértéken lévő ‘0’-’1’ kombinációk kiesnek!

Próbálgatás után az F1,F2 többkimenetű függvények realizálnak itt egy lehetséges elvi kapcsolási rajzot!

Kapott kimeneti függvények:

$$F_1 = a + d + e + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{B}CD + AC$$

$$F_2 = a + f + g + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{D} + BC + AC$$

1. Példa: eredmény

- Összehasonlítva a prímimplikánsokkal kifejezett F1,F2 kimeneti függvényeket, az látható, hogy
  - F2 függvények realizálásában nincs eltérés a két módszer (1) és (2) között. Továbbá, mindként F1 függvény ugyanannyi prímimplikáns taggal írható fel.
  - Viszont F1 függvényben az (2) módszer esetén a 3. prímimplikáns egyik változóját nem kell negálni!
- Következtetés: két módszer nem különbözik ÉS kapuk szintjén, viszont a VAGY kapuk szintjét tekintve **a (2) „módszer optimálisabb”:**
  - Egy vezetéket takarítunk meg (ÉS szint előtt nem invertálunk).

1.) módszer

$$F_1 = a + c + d + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \boxed{\overline{A}\,\overline{B}D} + \overline{A}\,\overline{C}D + AC$$

$$F_2 = a + f + g + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{D} + BC + AC$$

2.) módszer

$$F_1 = a + d + e + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + \boxed{\overline{B}CD} + AC$$

$$F_2 = a + f + g + h = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{D} + BC + AC$$

Több-kimenetű függvényekre a Quine-McCluskey módszer alkalmazása: NTSH hálózatok esetén

- Ugyanúgy kell eljárni, mint az egyváltozós számjegyes minimalizálás NTSH esetén, azaz:
- Közömbös (x) dont'care mintermek megadásakor
  - az összevonásoknál I.-II.-III. stb. oszlopok felírásánál a **dont'care értékeket fix '1' nek** tekintjük, továbbá
  - a közömbös mintermeket nem kell figyelembe venni a prímimplikáns tábla felírásakor (hiszen azok lefedéséről nem kell gondoskodnunk)
  - Végül, legtöbb esetben az **S** segédfüggvény felírása ad jó megoldást eredményül

2. Példa: Több kimenetű függvény számjegyes minimalizálása NTSH hálózat esetén

- Adottak a következő kimeneti függvények (4 bemenet, 3 kimenet):

NTSH!

$$F^4{}_1(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left[(0,5,7,8,10)+(2,4,13,15)\right]$$

$$F^4{}_2(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left[(3,7,8,10,11)+(0,15)\right]$$

$$F^4{}_3(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\left[(0,3,6,14,15)+(7,8)\right]$$

HF: valósítsa meg a legegyszerűbb kétszintű ÉS-VAGY elvi logikai kapcsolási rajzot!