Elektromosságtan Elektrotechnika

Szinuszos áramú hálózatok

Alaptörvények-áttekintés

- Alaptörvények
  - Áram, feszültség, teljesítmény, potenciál
  - Források
  - Ellenállás
  - Kondenzátor
  - Tekercs
- Hálózati egyenletek
- Lineáris időinvariáns hálózatok

Szinuszos áramú lineáris időinvariáns hálózatok

- Szinuszosan váltakozó feszültség és áram leírása
- Középértékek
- Szinuszosan váltakozó mennyiségekre vonatkozó alaptörvények
- Komplex írásmód
- Impedancia és admittancia
- Hálózatok számítása
- Teljesítmények
- Passzív kétpólus teljesítményei
- Impedanciák csillag-háromszög átalakítása
- Teljesítményillesztés

Szinuszosan váltakozó feszültség és áram leírása

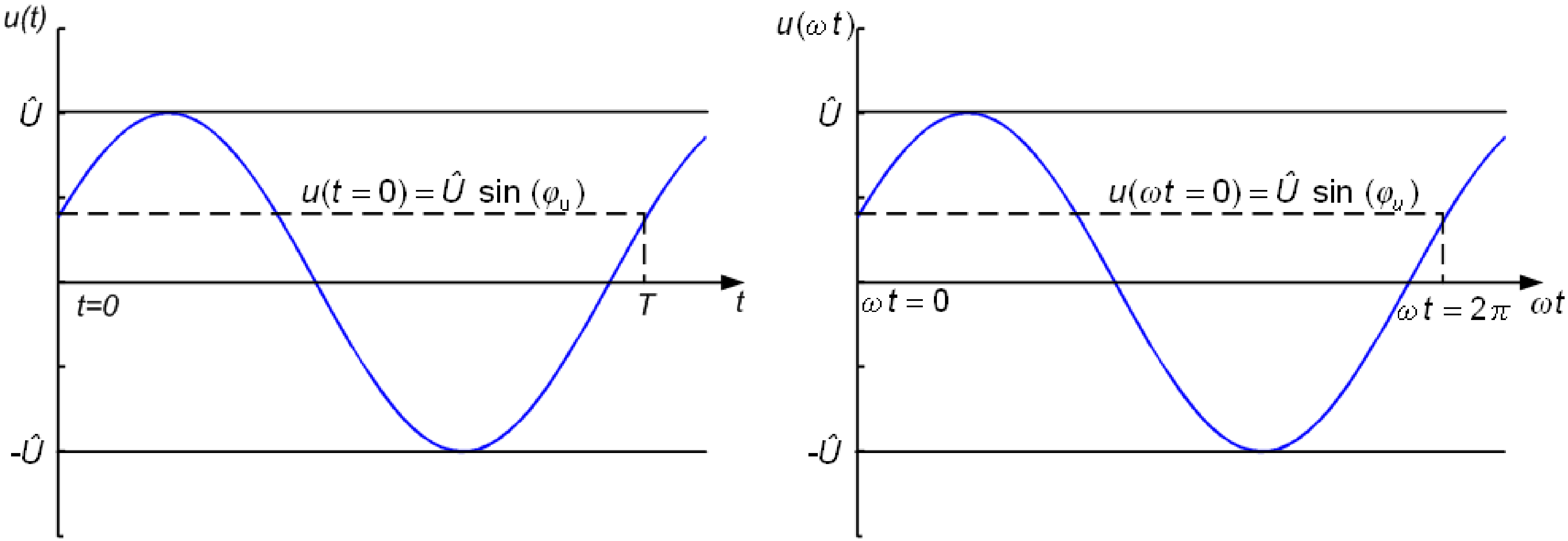
- Időben szinuszosan váltakozó áram, illetve feszültség alakja

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) &= \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \end{aligned},$$

ahol

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{a feszültség pillanatértéke, [V]} \\ i(t) &= \text{az áram pillanatértéke, [A]} \\ \hat{U} &= \text{a feszültség csúcsértéke [V]} \\ \hat{I} &= \text{az áram csúcsértéke [A]} \\ \omega &= \text{körfrekvencia, [rad/s]=[1/s]} \\ \varphi_u &= \text{a feszültség kezdőfázisa} \\ \varphi_i &= \text{az áram kezdőfázisa} \end{aligned}$$

Szinuszosan váltakozó feszültség és áram leírása



Középértékek

A villamos mérőműszerek a fesz. és az áram valamilyen középértékét mérik:

- Egyenáramú középérték:

$$U_K = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{\hat{U}}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi_u)dt =$$

$$= -\frac{\hat{U}}{\omega T}\left[\cos(\omega t + \varphi_u)\right]_0^T = -\frac{\hat{U}}{\omega T}\left[\cos(\omega T + \varphi_u) - \cos(\varphi_u)\right] = 0$$

Ha $u(t) = U_0 + \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u)$, akkor $U_K = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = U_0$

- Abszolút középérték:

$$U_A = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt = \frac{\hat{U}}{T}\int_0^T |\sin(\omega t+\varphi_u)|dt, \quad t = t' - \frac{\varphi_u}{\omega} \text{ transzformáció:}$$

$$= \frac{\hat{U}}{T'}\int_0^{T'} \sin(\omega t' dt') = 2\frac{\hat{U}}{T'}\int_0^{T'/2} \sin(\omega t')dt' = 2\frac{\hat{U}}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega t')dt' =$$

$$= -2\frac{\hat{U}}{\omega T}\left[\cos(\omega t')\right]_{t'=0}^{t'=T} = \frac{4\hat{U}}{2\frac{\pi}{T}T} = \frac{2}{\pi}\hat{U}$$

Középértékek

- Négyzetes középérték (effektív érték):

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_u)dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{2T}\int_0^T [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_u)]\, dt}$$

$$U^2 = \frac{\hat{U}^2}{2T}\left[t - \frac{\sin(2(\omega t + \varphi_u))}{2\omega}\right]_0^T = \frac{\hat{U}^2}{2} \quad \rightarrow \quad U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Effektív érték, négyzetes középérték

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

- Az effektív érték annak az egyenáramnak az értékével egyenlő, amely azonos idő alatt ugyanakkora munkát végez (hőt termel), mint a vizsgált váltakozó áram.
- Megállapodás szerint a szinuszos feszültség értékeként az effektív értéket adják meg.
  (Pl. a 230V-os-nak hívott hálózati feszültség effektív értéke 230V.)
  A szinuszos feszültséget vagy áramot mérő műszerek is általában az effektív értéket mutatják.

Szinuszosan váltakozó mennyiségekre vonatkozó alaptörvények

- Kirchoff-törvények:

$$\sum_k i_k(t) = 0 \quad \text{csomóponti törvény rang számú vágatra}$$

$$\sum_k u_k(t) = 0 \quad \text{huroktörvény nullitás számú hurokra}$$

- Feszültségforrás forrásfeszültsége:

$$u = u_V = \sqrt{2} U_V \sin(\omega t + \varphi_{u_V})$$

- Áramforrás forrásárama:

$$i = i_A = \sqrt{2} I_A \sin(\omega t + \varphi_{i_A})$$

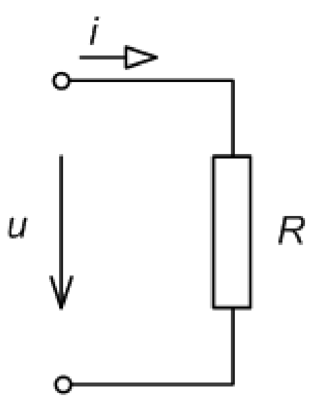
Ellenállás

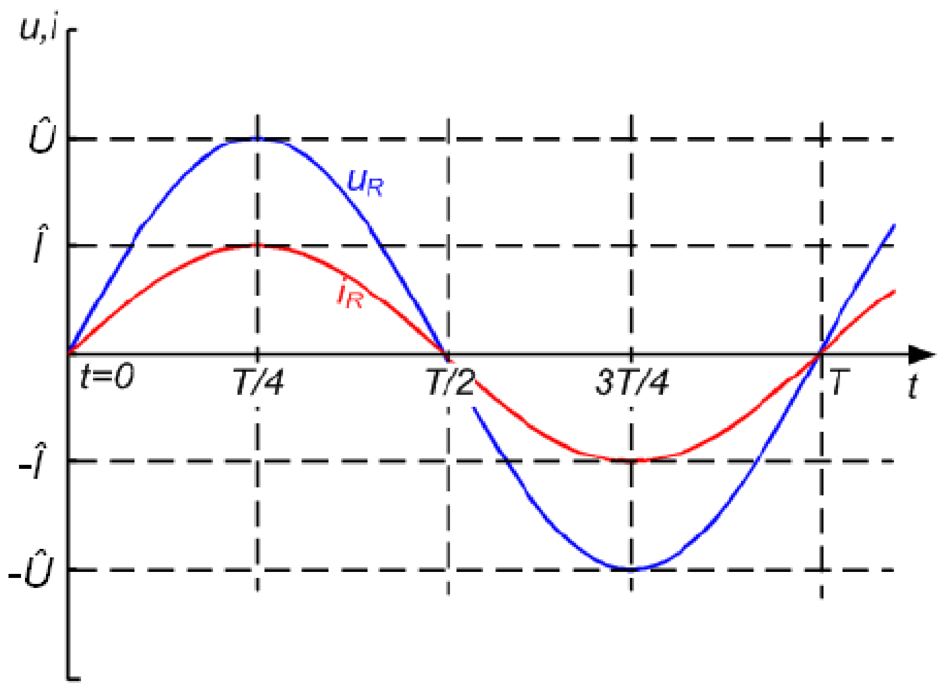
Az ellenállás feszültsége arányos áramával: $u = R \cdot i$ vagy $i = G \cdot u$, azaz

$$\sqrt{2} \cdot U_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u_R}) = R \cdot \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_{i_R}), \quad \text{amiből}$$

$$U_R = R \cdot I_R, \text{(vagy } I_R = G \cdot U_R, \text{) és } \varphi_{u_R} = \varphi_{i_R}$$

Az ellenállás árama és feszültsége *fázisban van* egymással, nincs közöttük fáziseltérés.





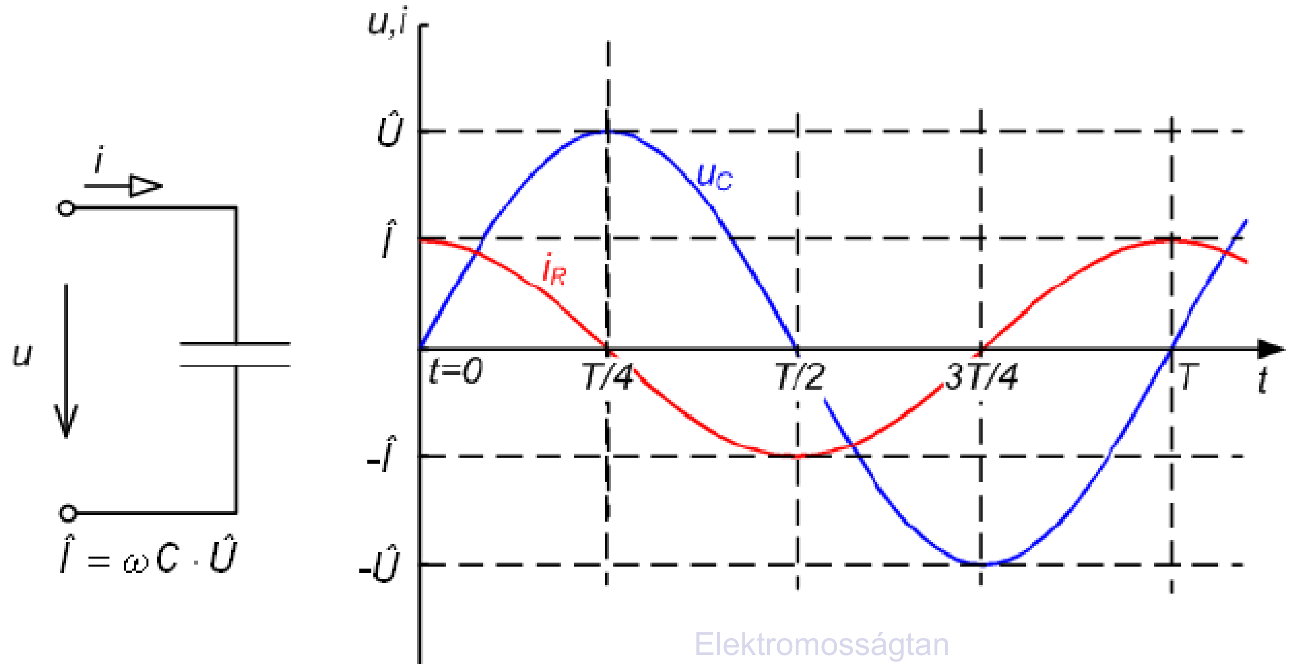
Kondenzátor

A kondenzátor árama arányos a feszültségének idő szerinti deriváltjával

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}, \qquad \text{azaz}$$

$$\sqrt{2} I_C \sin(\omega t + \varphi_{i_C}) = \omega C \sqrt{2} U_C \cos(\omega t + \varphi_{u_C}) = \omega C \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{amiből: } U_C = \frac{1}{\omega C} I_C, \quad \text{és } \varphi_{i_C} = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$$



A kondenzátor árama 90°-kal siet a feszültségéhez képest, (vagy feszültsége 90°-ot késik áramához képest)

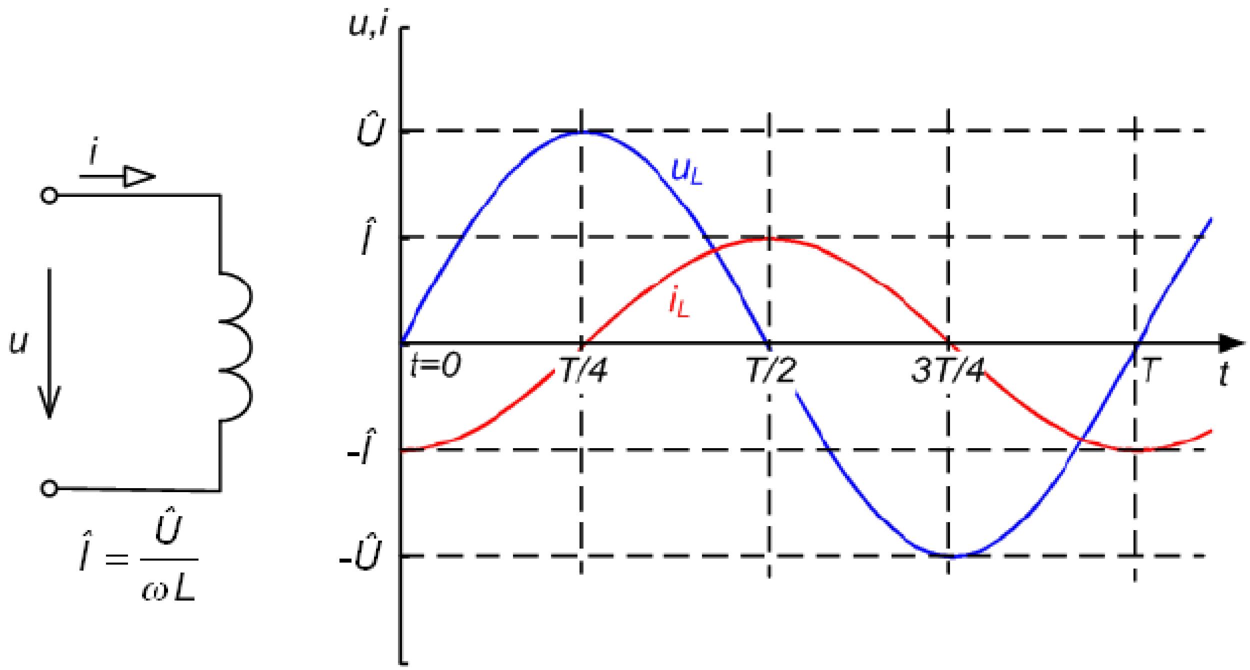
Induktivitás

A tekercs feszültsége arányos az áramának idő szerinti deriváltjával

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}, \qquad \text{azaz}$$

$$\sqrt{2}U_L \sin(\omega t + \varphi_{u_L}) = \omega L \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \varphi_{i_L}) = \omega L \sqrt{2} I_L \sin(\omega t + \varphi_{i_L} + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{amiből: } U_L = \omega L I_L, \quad \text{és } \varphi_{i_L} = \varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}$$



A tekercs árama 90°-ot késik a feszültségéhez képest, (vagy feszültsége 90°-kal siet áramához képest)

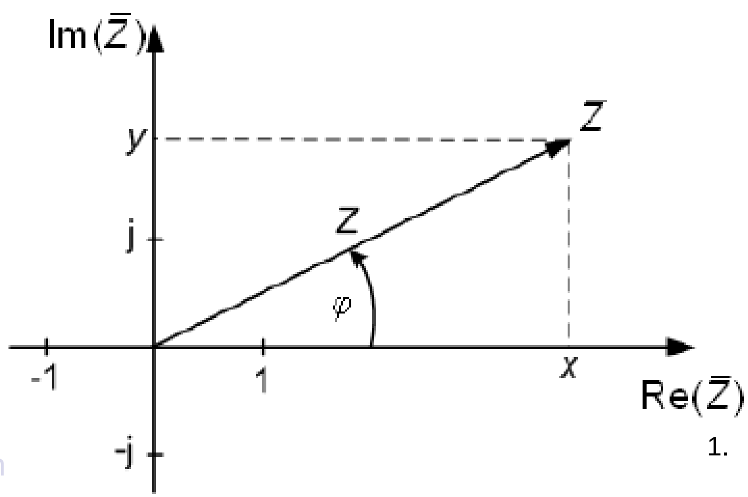
Komplex írásmód

- A Kirchoff-törvényekből és az ágtörvényekből mindig meghatározhatók az ismeretlen effektív értékek és kezdőfázisok
- Bonyolult, hosszadalmas, helyette a komplex írásmód használható
- Komplex számok ($\overline{Z} \in \mathbb{C}$) algebrai és exponenciális alakja:

$$\overline{Z} = x + \mathrm{j} \cdot y = Z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$$

- Euler-formula: $e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{j} \cdot \sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(\overline{Z}) = Z \cdot \cos(\varphi) \\ y &= \mathrm{Im}(\overline{Z}) = Z \cdot \sin(\varphi) \\ Z &= |\overline{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \mathrm{arc}(\overline{Z}) = \arctan(y/x) \end{aligned}$$



Komplex írásmód

- Legyen a feszültség és az áram (valós) pillanatértéke

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{U}\cdot\sin(\omega t+\varphi_u) \\ i(t) &= \hat{I}\cdot\sin(\omega t+\varphi_i) \end{aligned}$$

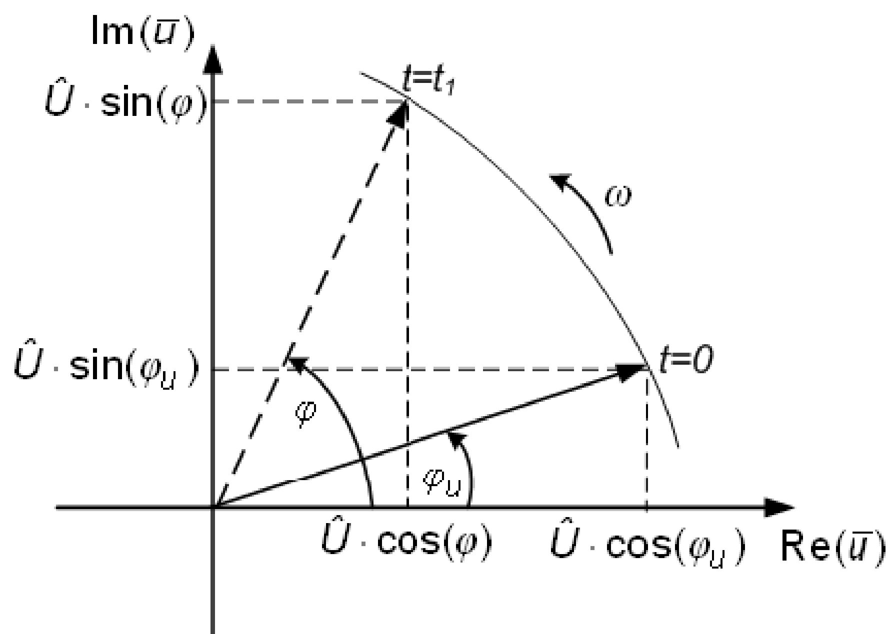
- Komplex pillanatértékek

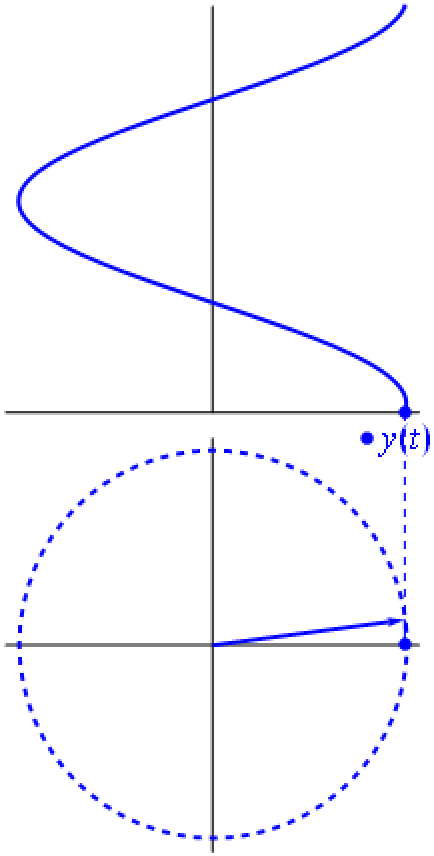
$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &= \hat{U}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_u)} &&= \hat{U}\cdot(\cos(\omega t+\varphi_u)+j\sin(\omega t+\varphi_u)) \\ \overline{i}(t) &= \hat{I}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_i)} &&= \hat{I}\cdot(\cos(\omega t+\varphi_i)+j\sin(\omega t+\varphi_i)) \end{aligned}$$

- A valós pillanatérték a komplex pillanatérték képzetes része

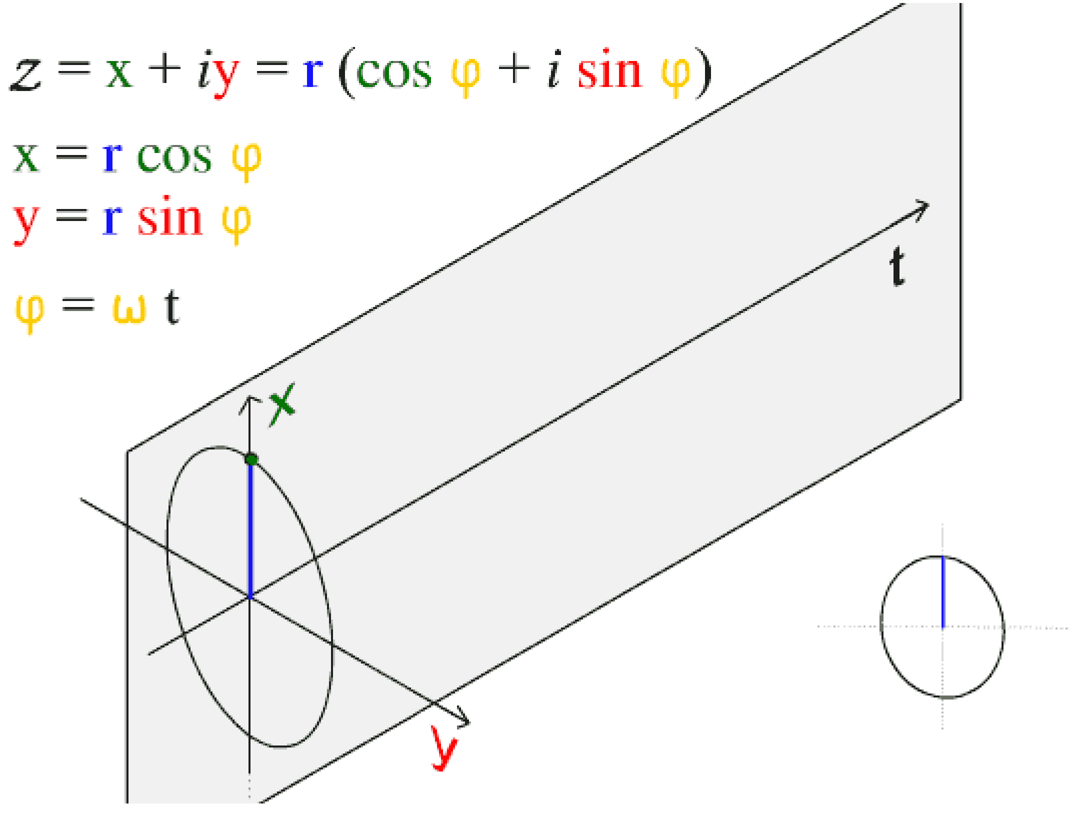
$$u(t)=\mathrm{Im}(\overline{u}),\quad i(t)=\mathrm{Im}(\overline{i})$$

- Az $\overline{u}$ vektor ω szögsebességgel forog a komplex számsíkon pozitív irányban
- A valós pillanatérték a képzetes tengelyre eső merőleges vetülete





- http://www.algebra.com/algebra/homework/complex/Phasor_(physics).wikipedia



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ComplexSinInATimeAxe.gif

Komplex írásmód

- A komplex pillanatérték ismeretében definiálható a komplex csúcsérték ($\overline{\hat{U}}$) és a komplex effektív érték ($\overline{U}$)

$$\begin{aligned}\overline{\hat{U}} &= \hat{U}\cdot e^{j\varphi_u} = \sqrt{2}\cdot U\cdot e^{j\varphi_u}\\ \overline{\hat{I}} &= \hat{I}\cdot e^{j\varphi_i} = \sqrt{2}\cdot I\cdot e^{j\varphi_i}\end{aligned}\ ,\quad \text{és}\quad \begin{aligned}\overline{U} &= U\cdot e^{j\varphi_u}\\ \overline{I} &= I\cdot e^{j\varphi_i}\end{aligned}$$

- A komplex csúcsérték illetve a komplex effektív érték ismeretében felírható a komplex pillanatérték

$$\begin{aligned}\overline{u}(t) &= \overline{\hat{U}}\cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2}\cdot\overline{U}\cdot e^{j\omega t}\\ \overline{i}(t) &= \overline{\hat{I}}\cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2}\cdot\overline{I}\cdot e^{j\omega t}\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}U &= |\overline{U}|\\ I &= |\overline{I}|\end{aligned}\ ,\quad \text{és}\quad \begin{aligned}\varphi_u &= \mathrm{arc}(\overline{U})\\ \varphi_i &= \mathrm{arc}(\overline{I})\end{aligned}$$

Kirchoff-törvények komplex alakja

- Kirchoff-törvények komplex pillanatértékekre

$$\sum_k i_k(t) = \sum_k \mathrm{Im}(\overline{i}_k(t)) = \mathrm{Im}\left(\sum_k \overline{i}_k(t)\right) = 0, \quad \text{azaz} \quad \sum_k \overline{i}_k(t) = 0$$

$$\sum_k u_k(t) = \sum_k \mathrm{Im}(\overline{u}_k(t)) = \mathrm{Im}\left(\sum_k \overline{u}_k(t)\right) = 0, \quad \text{azaz} \quad \sum_k \overline{u}_k(t) = 0$$

- Kirchoff-törvények komplex effektív értékekre

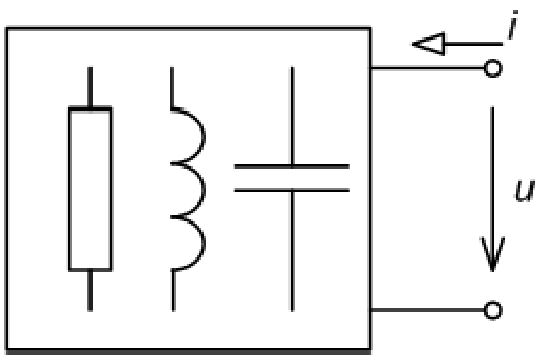
$$\sum_k \overline{i}_k(t) = \sum_k \sqrt{2} \cdot \overline{I}_k \cdot e^{j\omega t} = 0, \quad \text{azaz} \quad \sum_k \overline{I}_k = 0$$

$$\sum_k \overline{u}_k(t) = \sum_k \sqrt{2} \cdot \overline{U}_k \cdot e^{j\omega t} = 0, \quad \text{azaz} \quad \sum_k \overline{U}_k = 0$$

Impedancia és admittancia

- R, L és C elemekből álló passzív kétpólus bemenetére kapcsoljunk $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ feszültséget, melynek komplex effektív értéke
$$\overline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$$
- A kétpólus bemenetén folyó áram $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$, melynek komplex effektív értéke $$\overline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$
- A feszültség és áram komplex pillanatértékének hányadosa a kétpólus impedanciája ($\overline{Z}$)

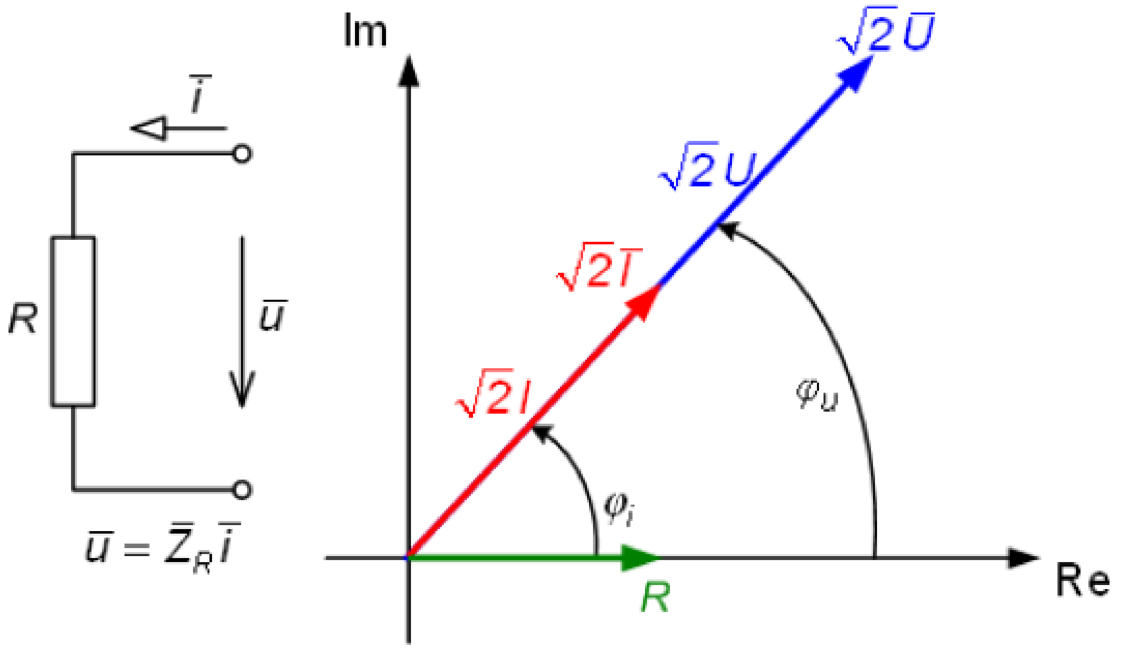
$$\overline{Z} = \frac{\overline{u}}{\overline{i}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \overline{U} \cdot e^{j\omega t}}{\sqrt{2} \cdot \overline{I} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot e^{j\varphi_i}} =$$
$$\frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi_Z}$$



ahol $Z = \frac{U}{I}$ az impedancia abszolút értéke,
$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$ az impedancia szöge

- Az impedancia reciproka az admittancia ($\overline{Y} = \overline{Z}^{-1}$)

Ellenállás



- $\overline{u} = R \cdot \overline{i}$, amiből

$$\overline{Z}_R = \frac{\overline{u}}{\overline{i}} = R \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_R = 0$$

Kondenzátor

$$i = C\frac{du}{dt}, \quad \text{amiből} \quad \mathrm{Im}(\overline{i}) = C\frac{d}{dt}\mathrm{Im}(\overline{u}) = \mathrm{Im}\left(C\frac{d\overline{u}}{dt}\right), \quad \text{azaz} \quad \overline{i} = C\frac{d\overline{u}}{dt}$$

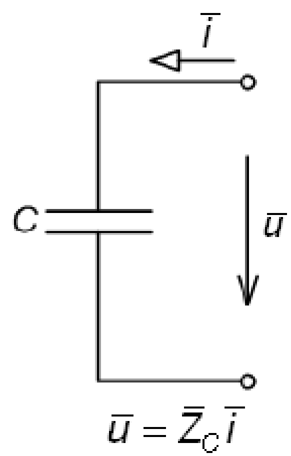
$$\overline{u} = \sqrt{2}\cdot\overline{U}e^{\mathrm{j}\omega t} \quad \rightarrow \quad \frac{d\overline{u}}{dt} = \mathrm{j}\omega\sqrt{2}\cdot\overline{U}e^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega\overline{u}$$

A kondenzátor árama

$$\overline{i} = C\frac{d\overline{u}}{dt} = \mathrm{j}\omega C\overline{u}$$

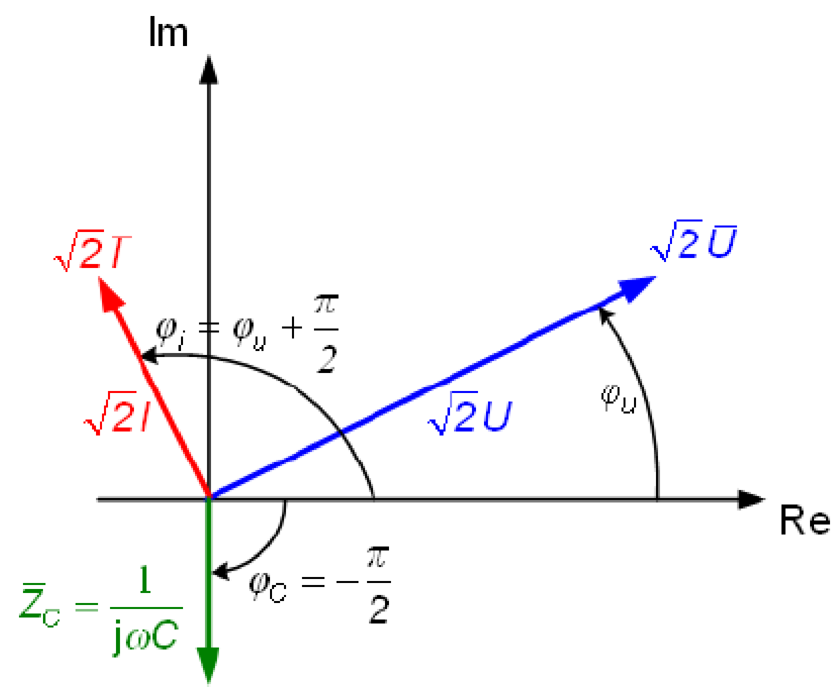
Impedanciája

$$\overline{Z}_C = \frac{\overline{u}}{\overline{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = Z_C e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$



$$Z_C = \frac{1}{\omega C},$$

$$\varphi_C = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$



Induktivitás

$$u = L\frac{di}{dt}, \quad \text{amiből} \quad \mathrm{Im}(\overline{u}) = L\frac{d}{dt}\mathrm{Im}(\overline{i}) = \mathrm{Im}\left(L\frac{d\overline{i}}{dt}\right), \quad \text{azaz} \quad \overline{u} = C\frac{d\overline{i}}{dt}$$

$$\overline{i} = \sqrt{2}\cdot\overline{I}e^{j\omega t} \quad \rightarrow \quad \frac{d\overline{i}}{dt} = j\omega\sqrt{2}\cdot\overline{I}e^{j\omega t} = j\omega\overline{i}$$

A tekercs feszültsége

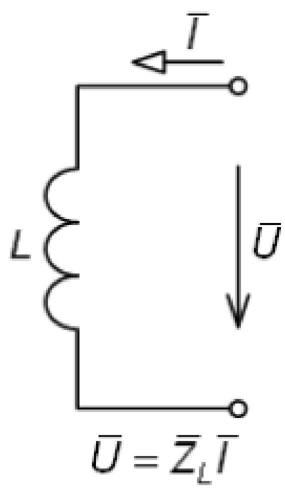
$$\overline{u} = L\frac{d\overline{i}}{dt} = j\omega L\overline{i}$$

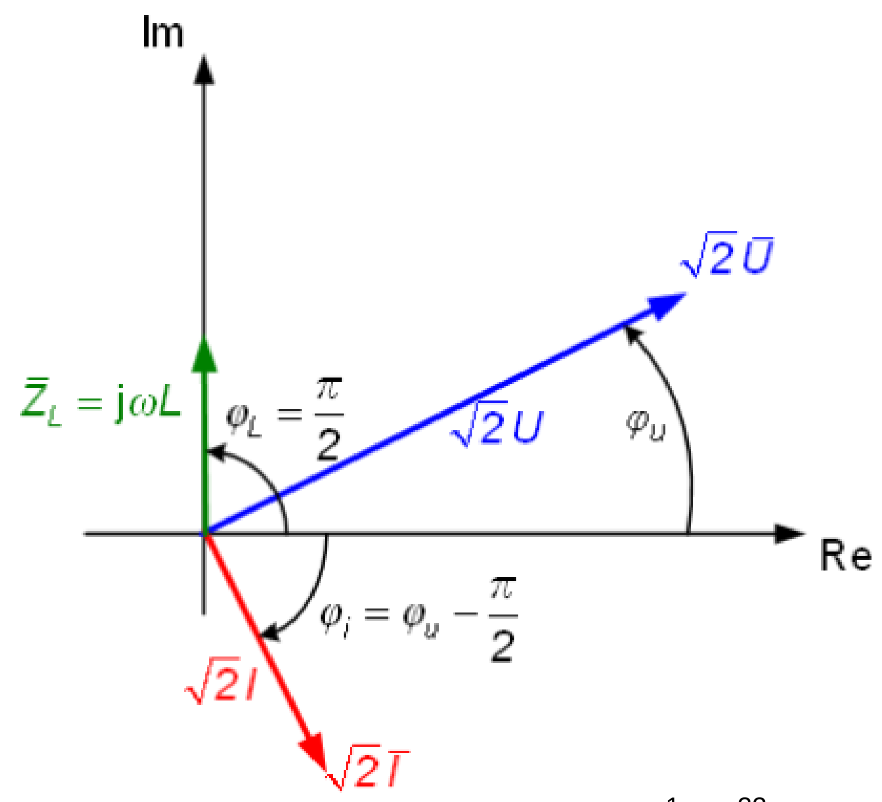
Impedanciája

$$\overline{Z}_L = \frac{\overline{u}}{\overline{i}} = j\omega L = Z_L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_L = \omega L,$$

$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$





Összefoglalva

- Az áram és feszültség komplex effektív értéke közti kapcsolat a komplex Ohm-törvény: $\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$.
- A $\overline{Z}$ komplex impedancia a különféle hálózati elemeknél az alábbi:

$$\overline{Z}_R = R, \qquad \overline{Z}_L = j\omega L, \qquad \overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

- A komplex impedancia a feszültség és az áram komplex effektív értékének hányadosa, nagysága a feszültség és az áram effektív értékének hányadosa, szöge pedig a feszültség és az áram kezdőfázisának különbsége:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}, \qquad Z = \frac{U}{I}, \qquad \varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$$

- Impedanciák soros, illetve párhuzamos eredője:

$$\overline{Z}_s = \sum_{k=1}^{n} \overline{Z}_k, \qquad \frac{1}{\overline{Z}_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_k}$$

Összefoglalva

- Az impedancia valós és képzetes része

$$\overline{Z} = R \pm \mathrm{j} \cdot X = Z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_Z}, \quad \text{ahol}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \qquad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{\pm X}{R}\right)$$

- Z a látszólagos ellenálás, R a hatásos ellenállás (rezisztancia), X pedig a meddő ellenállás (reaktancia)
- Az impedancia reciproka az admittancia:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = G \pm \mathrm{j} \cdot B = Y \cdot e^{-\mathrm{j}\varphi_Z} = Y \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_Y}$$

- Y a látszólagos vezetés, G a hatásos vezetés (konduktancia), B a meddő vezetés (szuszceptancia)
- Ohm-törvénye admittanciával kifejezve: $\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$

Hálózatok számítása

- A feszültségek és áramok effektív értékével és impedanciákkal számolva a szinuszos áramú hálózatok számítása megegyezik az egyenárú hálózatok számításával.
- Kirchoff-törvényekből és az ágtörvényekből $b + b$ számú lineáris algebrai egyenlet.
- Alkalmazhatók az egyenáramú hálózatoknál megismert módszerek:
  - Szuperpozíció elve
  - Thévenin-, és Norton-tétel
  - Csillag-háromszög átalakítás
  - Csomóponti potenciálok, és hurokáramok módszere
  - Millmann-tétele
- A feszültségek és áramok komplex effektív értékét vektorábrán szemléltetjük

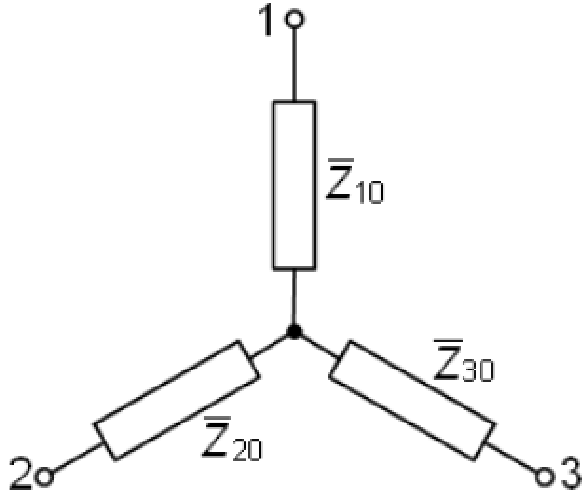
Impedanciák csillag-háromszög átalakítása

- Háromszög-csillag átalakítás

$$\overline{Z}_{10} = \frac{\overline{Z}_{12} \cdot \overline{Z}_{31}}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}}$$

$$\overline{Z}_{20} = \frac{\overline{Z}_{12} \cdot \overline{Z}_{23}}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}}$$

$$\overline{Z}_{30} = \frac{\overline{Z}_{23} \cdot \overline{Z}_{31}}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}}$$

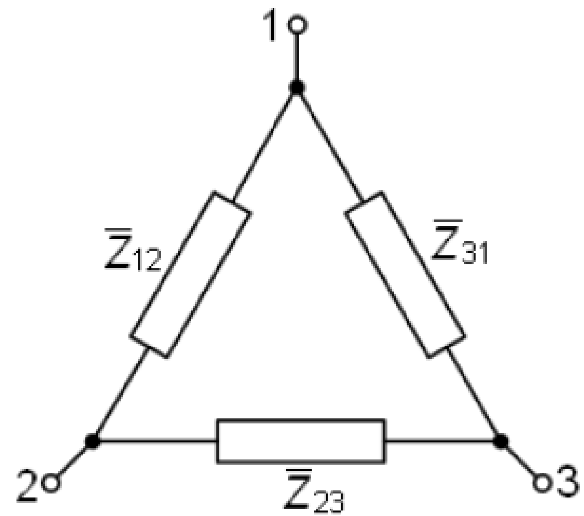


- Csillag-háromszög átalakítás

$$\overline{Y}_{12} = \frac{\overline{Y}_{10} \cdot \overline{Y}_{20}}{\overline{Y}_{10} + \overline{Y}_{20} + \overline{Y}_{30}}$$

$$\overline{Y}_{23} = \frac{\overline{Y}_{20} \cdot \overline{Y}_{30}}{\overline{Y}_{10} + \overline{Y}_{20} + \overline{Y}_{30}}$$

$$\overline{Y}_{31} = \frac{\overline{Y}_{30} \cdot \overline{Y}_{10}}{\overline{Y}_{10} + \overline{Y}_{20} + \overline{Y}_{30}}$$



Soros RL kör

- A kapocsfeszültség $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi_u)$, azaz $\overline{U} = U e^{j\varphi_u}$
- A hálózat impedanciája $\overline{Z} = R + j\omega L = Z e^{j\varphi_Z}$

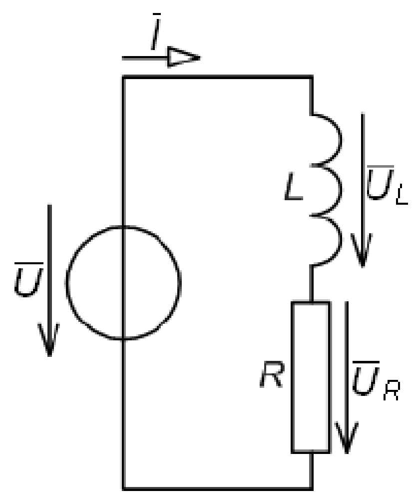
$$\text{ahol} \quad Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

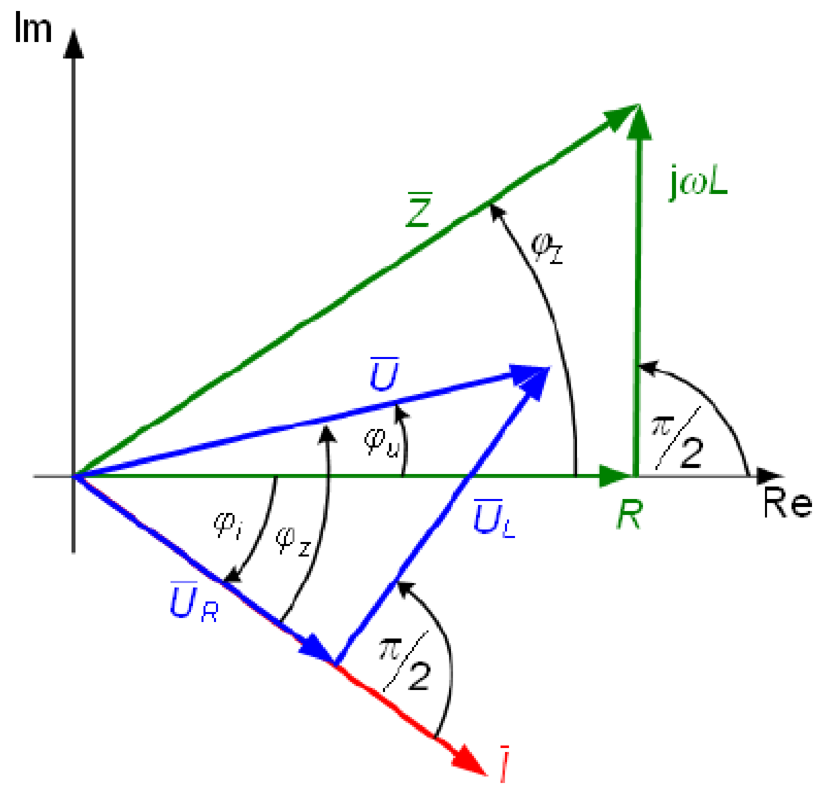
- Áramerősség $$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{Z e^{j\varphi_Z}} = I e^{j\varphi_i}$$
- Ellenállás feszültsége

$$\overline{U}_R = R\overline{I} = R I e^{j\varphi_i}$$
$$= U_R e^{j\varphi_i}$$

- Tekercs feszültsége

$$\overline{U}_L = j\omega L \overline{I} =$$
$$= \omega L I e^{j(\frac{\pi}{2} + \varphi_i)} =$$
$$= U_L e^{j(\frac{\pi}{2} + \varphi_i)}$$





Soros RC kör

- Impedancia $\overline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} = Ze^{j\varphi_Z}$

  ahol $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad \varphi_Z = -\arctan(\frac{1}{\omega RC})$

- Ellenállás feszültsége

  $\overline{U}_R = R\overline{I} = RIe^{j\varphi_i}$

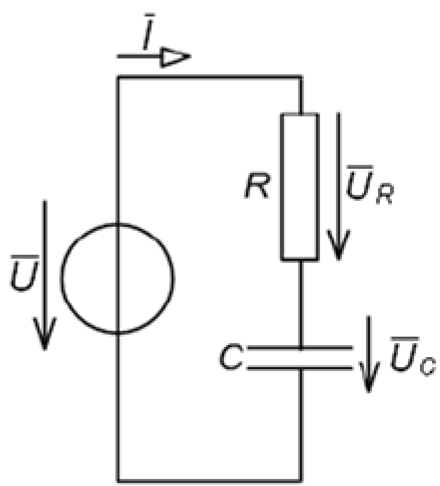
  $= U_R e^{j\varphi_i}$

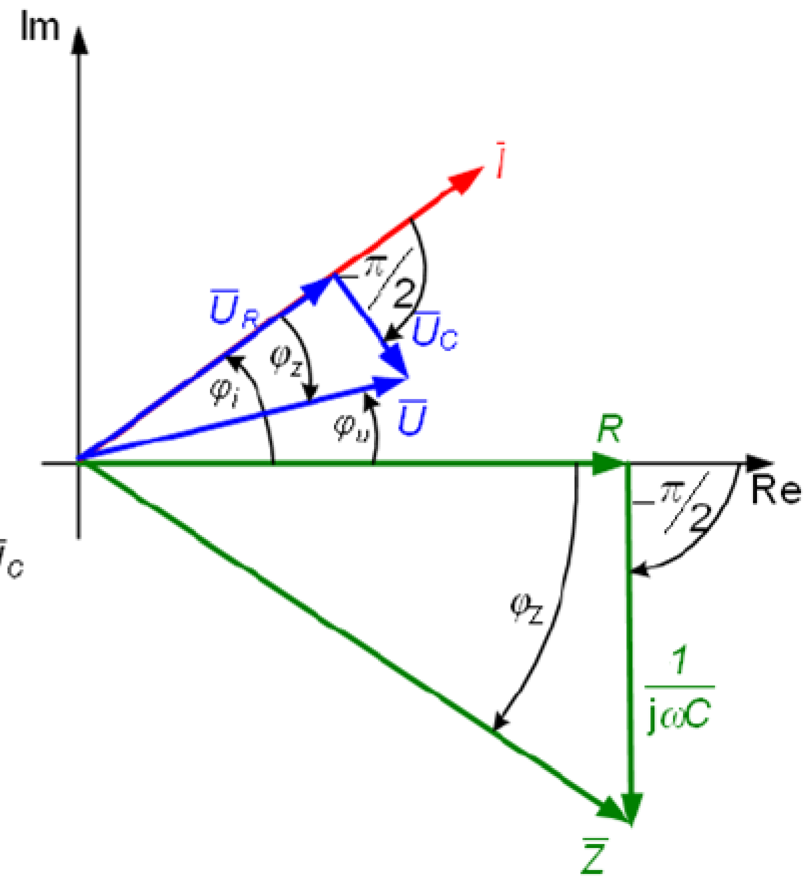
- Kondenzátor feszültsége

  $\overline{U}_L = \frac{1}{j\omega C}\overline{I} =$

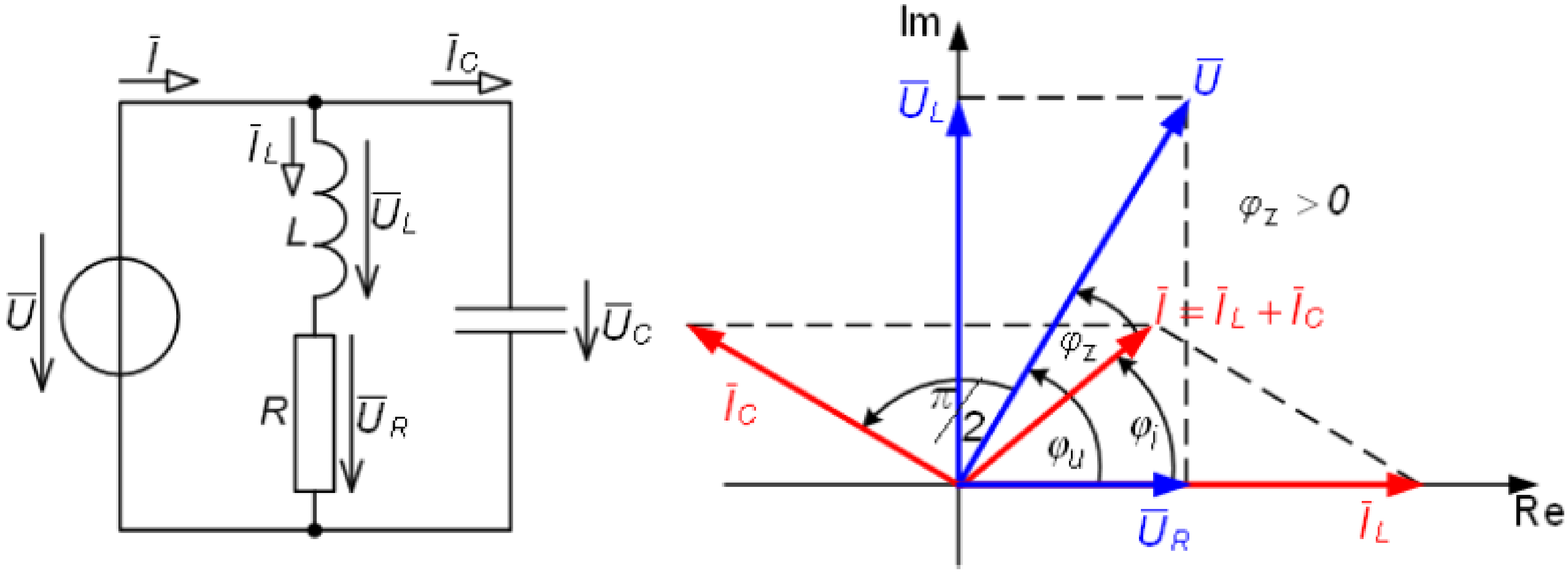
  $= \frac{1}{\omega C} Ie^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2})} =$

  $= U_C e^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2})}$





Párhuzamos rezgőkör



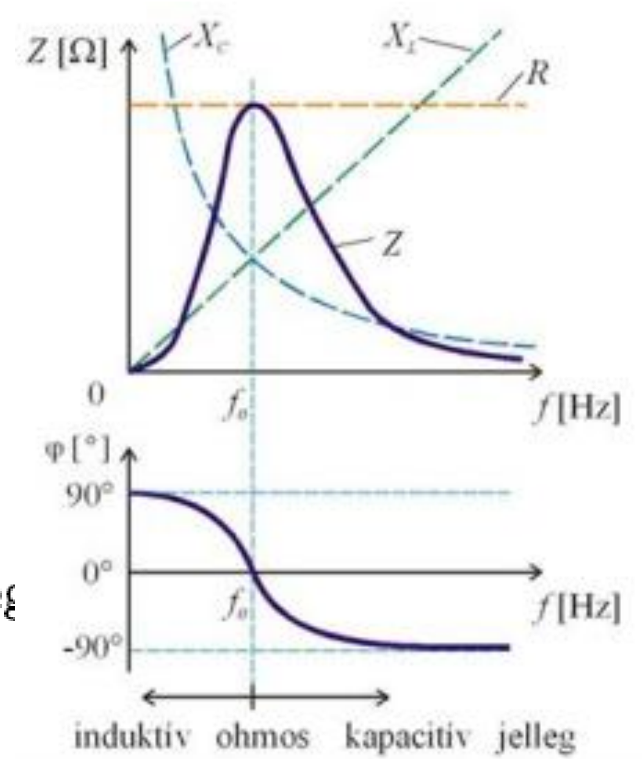
- Eredő impedancia

$$\overline{Z} = (R + j\omega L) \times \frac{1}{j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

- Ideális párhuzamos rezgőkör esetén $(R = 0)$

$$\overline{Z} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}, \quad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)$$

Párhuzamos rezgőkör



- Antirezonáns körfrekvencia ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$):

$$\overline{Z} = \frac{j\omega L}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

  - $\omega < \omega_0$: a kör induktív, $(\varphi_Z > 0)$
  - $\omega = \omega_0$: a kör rezisztív, $(\varphi_Z = 0)$ - itt vég
  - $\omega > \omega_0$: a kör kapacitív, $(\varphi_Z < 0)$

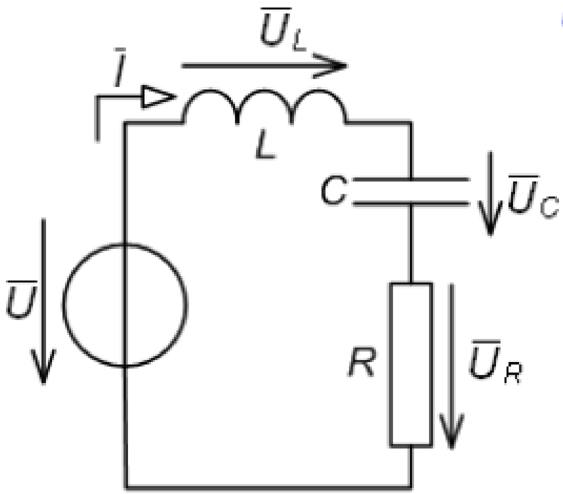
- Áramerősség:

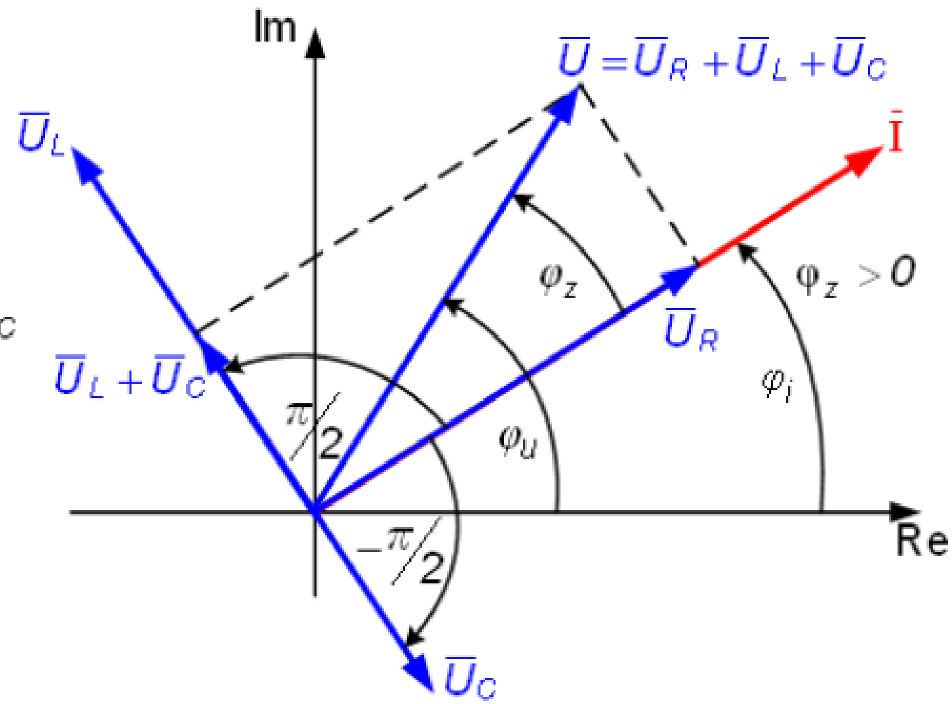
$$\overline{I} = \overline{I}_L + \overline{I}_C = \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)\overline{U} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

- Nem ideális esetben $(R > 0)$ az impedancia egyetlen frekvencián sem lesz végtelen nagy. Ha $R \ll \omega_0 L$, akkor az antirezonáns körfrekvencián:

$$\overline{Z} = \frac{j\omega_0 L}{1 - \omega_0^2 LC + j\omega_0 RC} = \frac{L}{RC} \quad \text{(rezonancia inpedancia)}$$

Soros rezgőkör

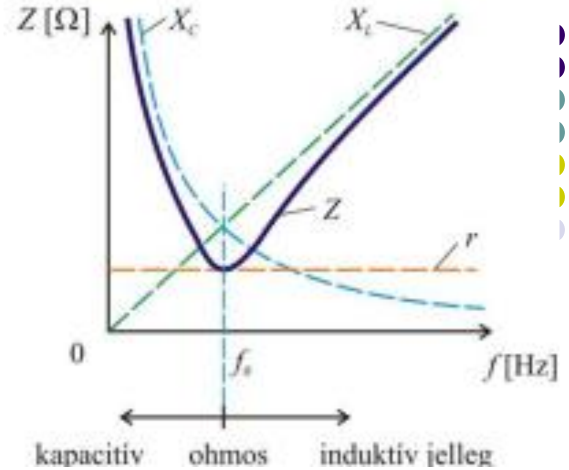




- Eredő impedancia

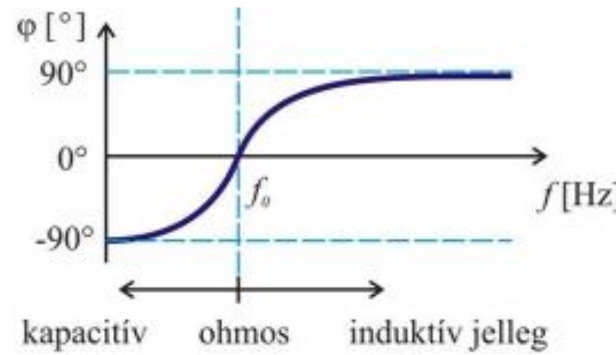
$$\overline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Soros rezgőkör



- Rezonáns körfrekvencia ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$):

$$\overline{Z} = R + j\omega L\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right), \quad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)\right)$$



- Ha $\omega = \omega_0$, akkor $\overline{Z} = R$, és $\varphi_Z = 0$
  - $\omega < \omega_0$: a kör kapacitív, ($\varphi_Z < 0$)
  - $\omega = \omega_0$: a kör rezisztív, ($\varphi_Z = 0$)
  - $\omega > \omega_0$: a kör induktív, ($\varphi_Z > 0$)
- Feszültség:

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\overline{I} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

Teljesítmények

- A kétpólus áramának és feszültségének ismeretében a teljesítménye:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}U \cdot \sin(\omega t + \varphi_Z) \\ i(t) &= \sqrt{2}I \cdot \sin(\omega t) \\ p(t) &= u(t) \cdot i(t) = 2U \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi_Z) \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

kihasználva, hogy $2\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= U \cdot I \cdot (\cos(\varphi_Z) - \cos(2\omega t + \varphi_Z)) \\ &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi_Z) - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi_Z) \end{aligned}$$

- A pillanatnyi teljesítmény egy középérték körül leng 2ω körfrekvenciával.
- A középérték jele P, neve: hatásos teljesítmény

$$P = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} p(t)dt = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_Z), \quad [W]$$

Teljesítmények

- Látszólagos teljesítmény: $S = U \cdot I, \quad [VA]$
- Teljesítménytényező:

$$\cos(\varphi_Z) = \frac{P}{S}$$

- A pillanatnyi teljesítmény a következő alakban is felírható

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) \\ &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi_Z)\,(1 - \cos(2\omega t)) + U \cdot I \cdot \sin(\varphi_Z) \cdot \sin(2\omega t) \\ &= P \cdot (1 - \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

- Az első tag egy P középértékű lengő teljesítmény, a második pedig egy nulla középértékű felesleges teljesítménylengés
- Meddő teljesítmény

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi_Z), \quad [VAr] \;\; (VA - \text{reaktív})$$

Ellenállás teljesítménye

- A feszültség és az áram fázisban van

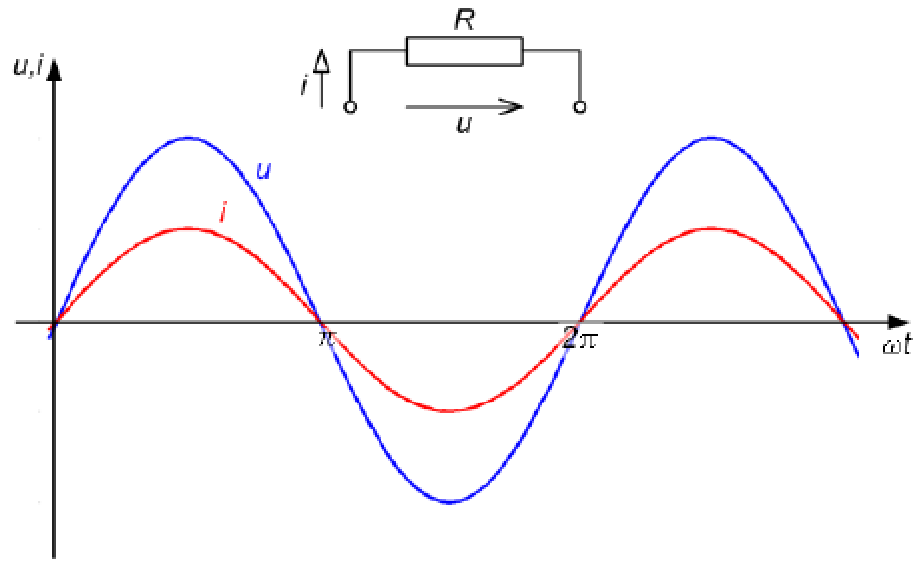
$$\varphi_Z = 0$$

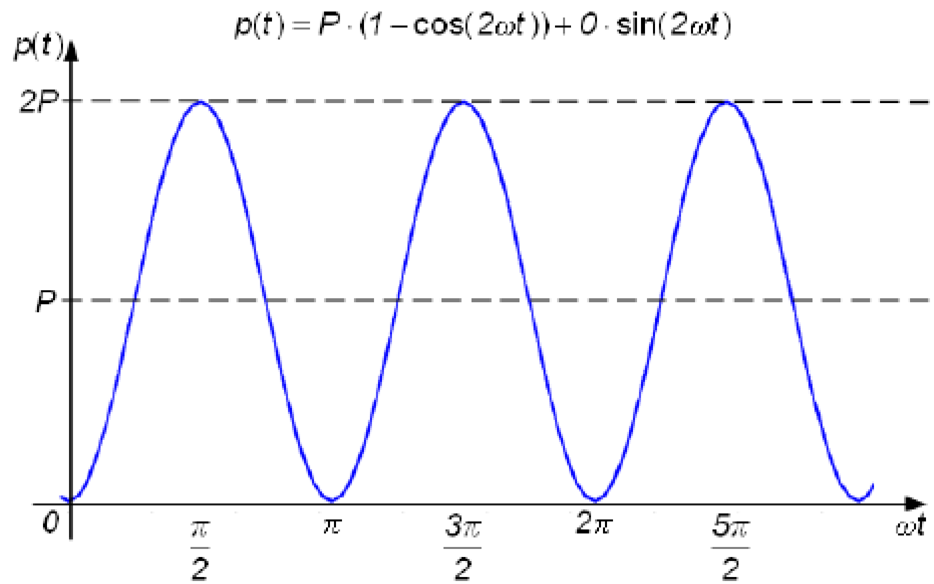
- A hatásos teljesítmény

$$P = U \cdot I \cdot \cos(0) = U \cdot I$$

- A meddő teljesítmény

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(0) = 0$$





Kondenzátor teljesítménye

- A feszültség az áramhoz képest 90°-kal késik

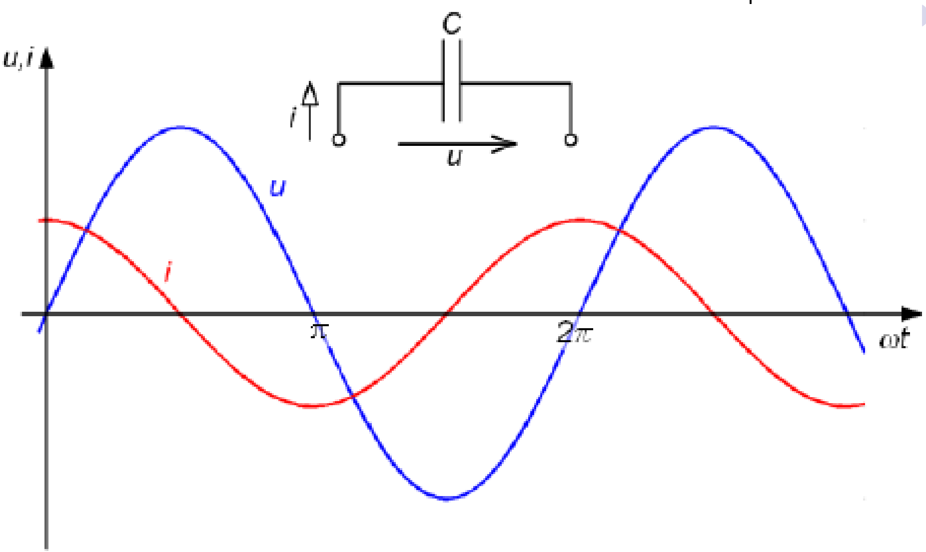
$$\varphi z = -\frac{\pi}{2}$$

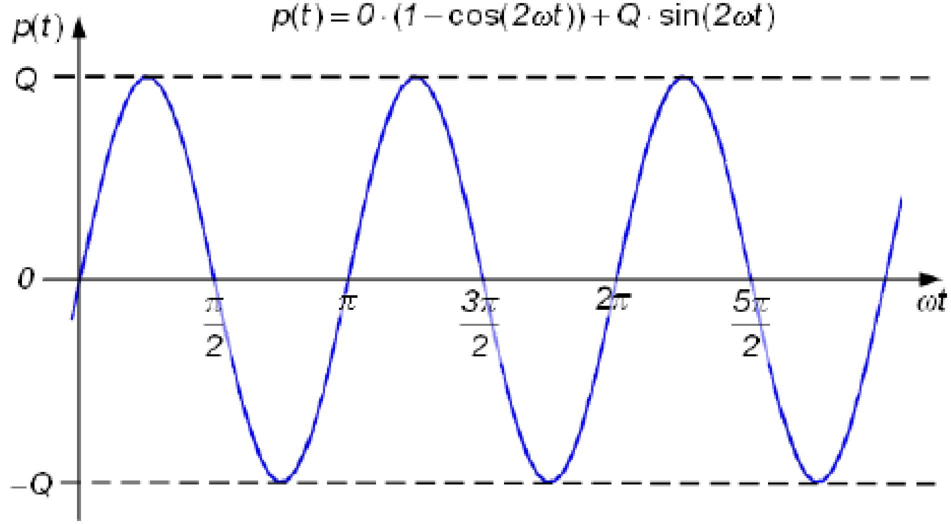
- A hatásos teljesítmény

$$P = U \cdot I \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- A meddő teljesítmény

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -U \cdot I$$





Tekercs teljesítménye

- A feszültség az áramhoz képest 90°-ot siet

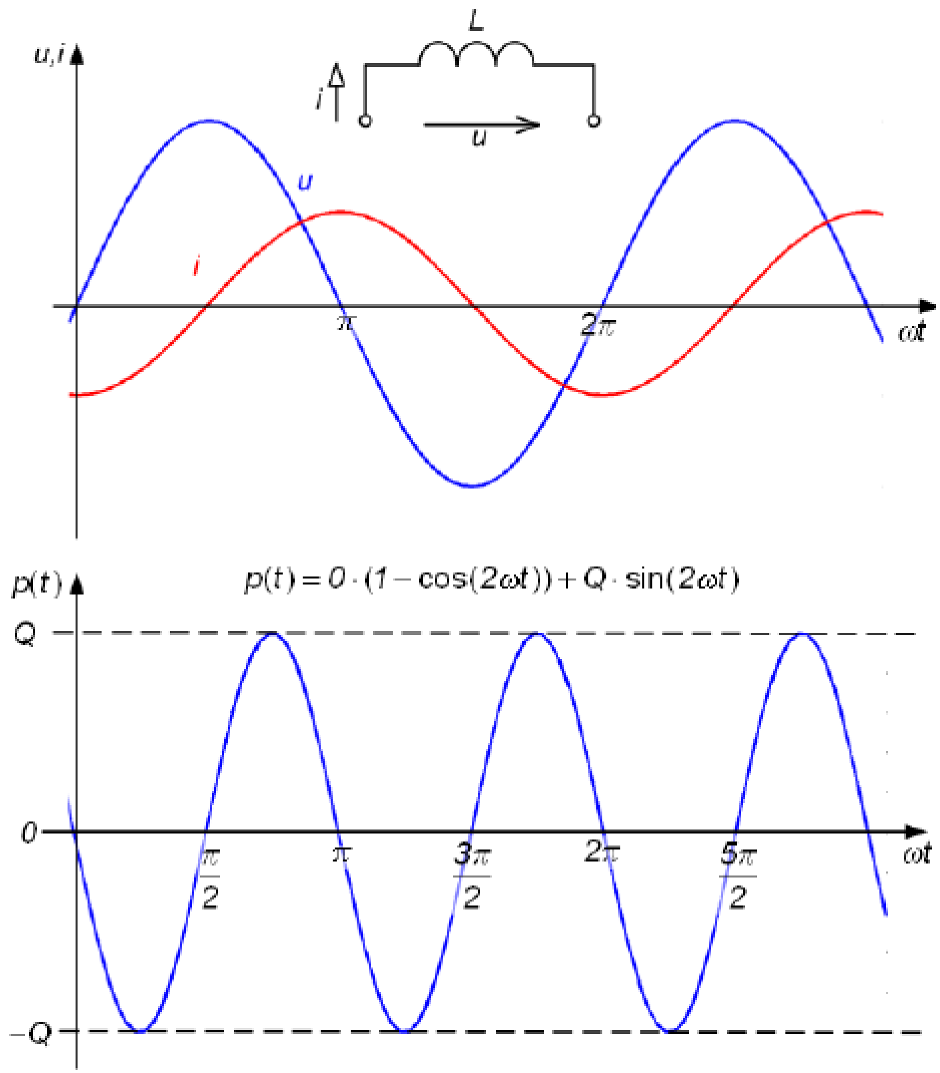
$$\varphi z = \frac{\pi}{2}$$

- A hatásos teljesítmény

$$P = U \cdot I \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- A meddő teljesítmény

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = U \cdot I$$



Passzív kétpólus teljesítményei Összefoglalva

- Hatásos, meddő, komplex, látszólagos

$$
\begin{aligned}
P &= \pm U \cdot I \cdot \cos(\varphi_Z) = \mathrm{Re}(\overline{S}) = \pm S \cos(\varphi_Z) &&= R \cdot I^2 = G \cdot U^2 \\
Q &= \pm U \cdot I \cdot \sin(\varphi_Z) = \mathrm{Im}(\overline{S}) = \pm S \sin(\varphi_Z) &&= X \cdot I^2 = -B \cdot U^2 \\
\overline{S} &= \pm \overline{U} \cdot \overline{I}^* = P + \mathrm{j}Q = \pm S \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_Z} &&= \overline{Z} \cdot I^2 = \overline{Y}^* \cdot U^2 \\
S &= U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\overline{S}| &&= Z \cdot I^2 = Y \cdot U^2
\end{aligned}
$$

Teljesítményillesztés

Határozzuk meg a $\overline{Z} = R + jX$ impedanciájú fogyasztó hatásos teljesítményét, ha $\overline{Z}_b = R_b + jX_b$ belső impedanciájú, U_V (valós) forrásfeszültségű generátorra kapcsolódik!

- Hatásos teljesítmény
$$P = R \cdot I^2 = R\frac{U_V^2}{|\overline{Z}+\overline{Z}_b|^2} = R\frac{U_V^2}{(R+R_b)^2+(X+X_b)^2}$$
- P maximális X-ben, ha $X = -X_b$:
$$P_{max} = \frac{R \cdot U_V^2}{(R+R_b)^2}, \quad X = -X_b$$
- P_{max} maximális R-ben, ha $R = R_b$:
$$P_{MAX} = \frac{U_V^2}{4R_b}, \quad R = R_b, \quad X = -X_b$$
- Teljesítményillesztés: $\overline{Z} = \overline{Z}_b^*$