Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése

Rekurzív paraméterbecslés, felejtés

Hangos Katalin, Szederkényi Gábor

PE Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

ISMÉTLÉS

LKN becslés paraméterekben lineáris esetben

A predikciós hiba:

$$\varepsilon(k,\theta) = y(k) - \theta^T \varphi(k)$$

A minimalizálandó kritériumfüggvény:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\left[y(k) - \theta^T\varphi(k)\right]^2$$

aminek minimális értéke θ függvényében adja az LKN-becslést:

$$\hat{\theta}_{LS} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)y(k)$$

A REKURZÍV PARAMÉTERBECSLŐ ELJÁRÁSOK

A rekurzív paraméterbecslő algoritmusok általános alakja

$$\hat{\theta}(\mathbf{k}) = \mathbf{F}(\hat{\theta}(\mathbf{k-1}), \mathbf{S}(\mathbf{k}), \mathbf{Z}(\mathbf{k}))$$
$$\mathbf{S}(\mathbf{k}) = \mathbf{H}(\mathbf{S}(\mathbf{k-1}), \hat{\theta}(\mathbf{k-1}), \mathbf{Z}(\mathbf{k}))$$

- $\hat{\theta}(k)$ a becsült **paramétervektor** értéke a k-adik időpillanatban;
- $Z(k)$ a rendelkezésre álló **mérési adatok** értéke a k-adik időpillanatban;
- $S(k)$ a **segédváltozó**;
- F és H **valamilyen elv szerint megválasztott** vektor bemenetű és vektor értékű **függvények**.

A rekurzív paraméterbecslés alapproblémája az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{H}$ függvények megválasztása.

Látható, hogy **a becsült paramétervektor értékének frissítéséhez csak az előző időpillanatban rendelkezésre álló becsült paramétervektor- és segédváltozó értékek valamint az aktuális mért adatok szükségesek.**

Rekurzív becslésekkel kezelhetőek az időben lassan változó, de nem szigorúan időinvariáns rendszerek paraméterbecslésének esetei is.

Rekurzív paraméterbecslés

Előnyök:

- **Az adatok feldolgozása "on-line" módon történik, nincs szükség nagy mennyiségű adat tárolására.**
- Az algoritmus működése **közben is eldönthető, hogy mikor érte el a becslés a kívánt pontosságot.**
- A rekurzív algoritmusok **a modell-struktúra finomítását is kisebb számítás- és időigénnyel végzik** el, mint nemrekurzív megfelelőik.

Hátrányok:

- Egy adott rekurzív algoritmus futattásakor **még az indítás előtt el kell dönteni, hogy milyen modell-struktúrát használunk**, míg "off-line" esetben különböző struktúrákat is kipróbálhatunk.
- A rekurzív algoritmusok (kevés kivétellel) **nem adnak olyan pontos becslést, mint a nemrekurzív módszerek**. Kellően nagy adatrekordok esetén ez a különbség azonban jelentéktelenné válik.

A rekurzív legkisebb négyzetek módszere 1

A dinamikus rendszerek széles osztályát diszkrét időben leíró **regressziós modell** a következő:

$$y(k) = \theta^T \varphi(k) + v(k) \tag{1}$$

A paraméterbecslés **súlyozott célfüggvény**e:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left[y(k) - \theta^T \varphi(k) \right] \tag{2}$$

A paramétervektor **legkisebb négyzetes becslés**ét adó statisztika a $V_N(\theta)$ minimuma θ-ra nézve:

$$\hat{\theta}_{LS}(N) = \left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi(k) y(k) \tag{3}$$

Ez **rekurzív alakra hozható**.

A rekurzív legkisebb négyzetek módszere 2

Vezessük be a következő jelölést:

$$\bar{R}(t) = \sum_{k=1}^{t} \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \tag{4}$$

$$\bar{R}(t-1) = \bar{R}(t) - \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \tag{5}$$

(3)-ből kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi(k) y(k) = \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \right]}_{\bar{R}(N)} \hat{\theta}(N) \tag{6}$$

Ha az összegzést N helyett $t-1$-ig végezzük, a következő egyenletet kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{t-1} \alpha_k \varphi(k) y(k) = \bar{R}(t-1) \hat{\theta}(t-1) \tag{7}$$

A rekurzív legkisebb négyzetek módszere 3

A (6) egyenletből kiindulva a fenti összefüggések felhasználásával kapjuk:

$$\hat{\theta}(t) = \bar{R}^{-1}(t)\left[\sum_{k=1}^{t}\alpha_k\varphi(k)y(k)\right] = \bar{R}^{-1}(t)\left[\sum_{k=1}^{t-1}\alpha_k\varphi(k)y(k) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right]$$
$$= \bar{R}^{-1}(t)\left[\bar{R}(t-1)\hat{\theta}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right]$$
$$= \bar{R}^{-1}(t)\left[\left(\bar{R}(t) - \alpha_t\varphi(t)\varphi^T(t)\right)\hat{\theta}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right]$$
$$= \bar{R}^{-1}(t)\left[\bar{R}(t)\hat{\theta}(t-1) - \alpha_t\varphi(t)\varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right] =$$
$$= \bar{R}^{-1}(t)\{\bar{R}(t)\hat{\theta}(t-1) + \alpha_t\varphi(y)\left[-\varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) + y(t)\right]\}$$
$$= \hat{\theta}(t-1) + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)\alpha_t\left[y(t) - \hat{\theta}^T(t-1)\varphi(t)\right]$$

A **rekurzív legkisebb négyzetek algoritmusának első alakja**:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)\alpha_t\left[y(t) - \hat{\theta}^T(t-1)\varphi(t)\right]$$
$$\bar{R}(t) = \bar{R}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)\varphi^T(t)$$

A **gyakorlatban nem ezt az alakot használják**, mert minden lépésében egy kvadratikus mátrixot ($\bar{R}$) kell invertálni.

Mátrix inverziós lemma

Lemma: Legyenek A,B,C és D olyan mátrixok, hogy az $[A+BCD]$ mátrix létezik, kvadratikus és invertálható, valamint A és C invertálható. Ekkor igaz a következő egyenlőség

$$[A+BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left[DA^{-1}B + C^{-1}\right]^{-1}DA^{-1}$$

Ekkor a $P(t) = \bar{R}^{-1}(t)$ jelöléssel igazak a következő egyenlőségek:

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)\varphi^T(t)$$
$$P(t) = \left[P^{-1}(t-1) + \varphi(t)\alpha_t\varphi^T(t)\right]^{-1}$$

Ha a mátrix inverziós lemmát erre alkalmazzuk, a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} P(t) &= P(t-1) - P(t-1)\varphi(t)\left[\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t) + \frac{1}{\alpha_t}\right]^{-1}\varphi^T(t)P(t-1) \\ &= P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\frac{1}{\alpha_t} + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \end{aligned}$$

A rekurzív legkisebb négyzetek módszere 4

A rekurzív legkisebb négyzetes becslés algoritmusának gyakorlatban használt formája

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\frac{1}{\alpha_t} + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t P(t)\varphi(t)\left[y(t) - \hat{\theta}^T(t-1)\varphi(t)\right]$$

A kezdeti feltételek megválasztása

Az algoritmus indításakor (a t_0 időpillanatban) szükség van P mátrix és $\hat{\theta}$ vektor kezdeti értékére, amiből a további értékeket számítjuk. **A kezdeti feltételek megválasztásának szokásos módja** a következő:

$$P(t_0) = \left[\sum_{k=1}^{t_0} \alpha_k \varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1} \tag{8}$$

$$\hat{\theta}(t_0) = P(t_0)\sum_{k=1}^{t_0} \alpha_k \varphi(k) y(k) \tag{9}$$

ami **egy néhány mintán elvégzett hagyományos (nemrekurzív) legkisebb négyzetes becslés. Így garantálható, hogy a rekurzív algoritmus becsült paraméterének kezdeti értéke nem lesz túlságosan távol a valódi paraméterértéktől.**

REKURZÍV GRADIENS MÓDSZER

A probléma leírása

A legkisebb négyzetes paraméterbecslés kritériumfüggvényének minimalizálásakor nagyban megkönnyítette a helyzetünket, hogy a regressziós modellben a prediktor kimenete lineárisan függ a paramétervektor elemeitől (**paraméterekben lineáris model**l).

A gyakorlatban azonban sokszor adódik olyan modell, amikor ez a lineáris összefüggés nem teljesül. Mi a teendő ilyenkor?

Ha a kvadratikus kritériumfüggvény ($V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[y(k) - \hat{y}(k|\theta)\right]^2$) analitikusan nem minimalizálható, akkor célszerű valamilyen numerikus szélsőérték-kereső eljárást alkalmazni. Azonban a nemrekurzív megoldások nagy számítás- és időigénye gyakran nem teszi lehetővé gyakorlati alkalmazásukat.
Szerencsére ebben az esetben is **rendelkezésünkre állnak az algoritmusok kedvezőbb számítási tulajdonságokkal rendelkező rekurzív változatai**, amelyek közül a **gradiens módszer**t mutatjuk be.

Közelítések a rekurzív gradiens módszerhez

A **predikciós hiba** definíciója a következő volt:

$$\varepsilon(k,\theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta)$$

Jelöljük ψ-vel ε-nak a θ paraméter szerinti negatív parciális deriváltját:

$$\psi(k,\theta) = \left[-\frac{d}{d\theta}\varepsilon(k,\theta)\right]^T$$

Mivel θ valódi értékét nem ismerjük, az eljárásban ε-t és ψ-t a következőképpen **közelítjük**:

$$\hat{\varepsilon}(k,\hat{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k|\hat{\theta}(k-1))$$
$$\hat{\psi}(k,\hat{\theta}) = \left[-\frac{d}{d\hat{\theta}(k-1)}\hat{\varepsilon}(k,\hat{\theta})\right]^T$$

A rekurzív gradiens módszer

A paraméterbecslő algoritmus a következő:

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\hat{\psi}(k,\hat{\theta})\hat{\psi}^T(k,\hat{\theta})P(k-1)}{1+\hat{\psi}^T(k,\hat{\theta})P(k-1)\hat{\psi}(k,\hat{\theta})}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\hat{\psi}(k,\hat{\theta})\hat{\varepsilon}(k,\hat{\theta})$$

Az algoritmus indításához szükséges P és $\hat{\theta}$ kezdeti értékének megválasztása, amiktől függ a konvergencia gyorsasága.

$$\hat{\varepsilon}(k,\hat{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k|\hat{\theta}(k-1))$$

$$\hat{\psi}(k,\hat{\theta}) = \left[-\frac{d}{d\hat{\theta}(k-1)}\hat{\varepsilon}(k,\hat{\theta})\right]^T$$

IDőBEN VÁLTOZÓ PARAMÉTEREK REKURZÍV BECSLÉSE

Problémafelvetés

Az eddig tárgyalt valamennyi identifikációs eljárásnál azt feltételeztük, hogy a becsülni kívánt paraméter(vektor) valódi értéke (vagy várható értéke) időben konstans (**idoinvariáns rendszerek**).

Ha feltesszük, hogy a paramétervektor értéke időben változhat, akkor ezekkel az eljárásokkal nem tudjuk követni az időbeli változásokat, hiszen mindegyikük egy pontbecslést ad a paraméterek értékeire.
Olyan algoritmusokra van tehát **szükség, amelyek minden diszkrét időpillanathoz rendelnek becsült paraméter értéket (amely követi a változásokat).**

A következőkben e probléma néhány gyakran használt megoldását ismertetjük.

Időben változó paraméterek követése

Csúszóablakos paraméterbecslés
A csúszóablakos megoldás lényege, hogy **a paramétervektor adott időpillanatbeli értékének becslését csak a legutolsó N db megfigyelés figyelembevételével végezzük.** Az ennél régebbi méréseket egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk. **Az identifikációs algoritmus lehet bármely eddig tárgyalt nemrekurzív vagy rekurzív módszer. Minél nagyobb a csúszóablak mérete** (azaz az egy becsléshez figyelembe vett adatok száma), **annál pontosabb a paraméterbecslés, azonban annál lassabban követhetők paraméterek időbeli változásai.**

Fokozatos (exponenciális) "felejtés"
Ebben az esetben **a régi mérési adatok az idő előrehaladtával egyre kisebb súlyt kapnak a paraméterbecslésben**, azaz fokozatosan "felejtődnek el". **Két módszer**t mutatunk be:

- **Rekurzív legkisebb négyzetek módszere exponenciális felejtéssel**
- **Rekurzív gradiens módszer exponenciális felejtéssel**

Rekurzív legkisebb négyzetek módszere exponenciális felejtéssel 1

Tekintsük a következő **súlyozott négyzetes kritériumfüggvényt**:

$$V_N(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \bar{\beta}(N,k)[y(k) - \theta^T \varphi(k)]^2$$

ahol rögzített N esetén $\bar{\beta}(\mathbf{N},\mathbf{k})$ **monoton nő k növekedésével.** Ezzel

$$\hat{\theta}(N) = \left[\sum_{k=1}^{N} \bar{\beta}(N,k)\varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{N} \bar{\beta}(N,k)\varphi(k)y(k)\right]$$

Legyen $\bar{\beta}(t,k) = \lambda(t)\bar{\beta}(t-1,k)$. Ekkor

$$\bar{\beta}(t,k) = \left[\prod_{j=k+1}^{t} \lambda(j)\right] \alpha_k, \quad \alpha(k) = \bar{\beta}(k,k), \quad \lambda(k) \le 1$$

Ha $\lambda(k) = \lambda$, akkor

$$\bar{\beta}(t,k) = \lambda^{t-k} \alpha_k$$

ahol λ az ún. **felejtési tényező** (forgetting factor).

Rekurzív legkisebb négyzetek módszere exponenciális felejtéssel 2

Vezessük be a következő jelölést:

$$\bar{R}(t) = \sum_{k=1}^{t} \bar{\beta}(t,k)\varphi(k)\varphi^T(k)$$

Ekkor igazak a következő egyenlőségek:

$$\bar{R}(t) = \lambda(t)\bar{R}(t-1) + \alpha(t)\varphi(t)\varphi^T(t)$$

$$\hat{\theta}(t) = \bar{R}^{-1}(t)\left[\sum_{k=1}^{t-1} \bar{\beta}(t,k)\varphi(k)y(k) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right]$$

$$= \bar{R}^{-1}(t)\left[\lambda(t)\sum_{k=1}^{t-1} \bar{\beta}(t-1,k)\varphi(k)y(k) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right] =$$

$$= \bar{R}^{-1}(t)\left[\lambda(t)\bar{R}(t-1)\hat{\theta}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)y(t)\right]$$

$$= \bar{R}^{-1}(t)\left[\bar{R}(t)\hat{\theta}(t-1) + \alpha_t\varphi(t)\left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right]\right] =$$

$$= \hat{\theta}(t-1) + \bar{R}^{-1}(t)\varphi(t)\alpha_t\left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right]$$

Rekurzív LKN exponenciális felejtéssel

Legyen $P(t) = \bar{R}^{-1}(t)$. Ekkor

$$P^{-1}(t) = \lambda(t) P^{-1}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t)$$
$$P(t) = \left[\lambda(t) P^{-1}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t)\right]^{-1}$$

Alkalmazva a mátrix inverziós lemmát a következőt kapjuk:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) - \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1)\varphi(t) \left[\varphi^T(t) \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1)\varphi(t) + \frac{1}{\alpha_t}\right]^{-1} \varphi^T(t) P(t-1) \frac{1}{\lambda(t)}$$

Az exponenciális felejtéssel működő rekurzív legkisebb négyzetes algoritmus tehát a következőképp összegezhető:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t) P(t-1)}{\frac{\lambda(t)}{\alpha_t} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \right]$$
$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t P(t) \varphi(t) \left[y(t) - \varphi^T \hat{\theta}(t-1) \right]$$

Rekurzív legkisebb négyzetek módszere exponenciális felejtéssel 3

Az algoritmus paramétereinek megválasztása

- A **kezdeti feltételek** megválasztására ebben az esetben is igazak a rekurzív legkisebb négyzetes becslésnél leírtak.
- További fontos tervezési paraméter a **felejtési tényező**. **Ha λ értéke kicsi, a becslés gyorsan követi a paraméter változásait** (gyors a felejtés), **de egyben érzékenyebb is lesz a zajra és az esetleges modellezési hibákra.** Mindennek az ellenkezője igaz akkor, ha λ értéke nagy (közel van 1-hez).

Rekurzív gradiens módszer exponenciális felejtéssel

Itt csak az **algoritmus végső alakját adjuk meg**, a jelölések azonosak a rekurzív gradiens módszernél használtakkal.

$$P(k) = \frac{P(k-1)}{\lambda(k) + \hat{\psi}^T(k,\hat{\theta})P(k-1)\hat{\psi}(k,\hat{\theta})}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\hat{\psi}(k,\hat{\theta})\hat{\varepsilon}(k,\hat{\theta})$$

ahol a **felejtési tényező** (λ) **szerepe megegyezik a rekurzív felejtő legkisebb négyzetes becslésnél leírtakkal.**