



Folytonos idejű rendszerek stabilitása

Gerzson Miklós

Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

2019/2020 II. félév



Stabilitás

- egyszerűsített szemlélet
 - példa
 - zavarás után a magára hagyott rendszer
 - visszatér a nyugalmi állapotába
 - kvázistacionárius állapotba kerül
 - „végtelenbe” tart
 - alapjel-váltás



Stabilitás

- definíciók
 - BIBO stabilitás – külső stabilitás
a bemenetek – kimenetek viszonyára tesz megkötést
 - aszimptotikus stabilitás
a kimenetek határértékére tesz megkötést



BIBO stabilitás

- BIBO stabilitás definíciója

Egy rendszert BIBO stabilnak nevezünk, ha korlátos bemenet, azaz $|u(t)| < M_1$, valamely $-\infty < t_0 \leq t < \infty$ időintervallum esetén, a kimenete is korlátos: $|y(t)| < M_2$, a $t_0 \leq t < \infty$ időintervallumon (ahol $M_1, M_2 < \infty$, és t_0 a kezdőidőpont) .



BIBO stabilitás

- **Tétel:**

Egy rendszer akkor és csak akkor BIBO stabil, ha

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < M < \infty$$

azaz a súlyfüggvény abszolút integrálja korlátos.



Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- Legyen n -ed rendű lineáris, időinvariáns rendszer bemenete zérus, a kimenete pedig a kezdeti értékek miatt $y(t)$. Ekkor $y(t)$ a következő módon fejezhető ki:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) \cdot y^{(k)}(t_0)$$

ahol $g_k(t)$ jelöli az $y^{(k)}(t_0)$ kezdeti értékek miatti, a nulla bemenetre adott válasz $(k+1)$ -dik komponensét és

$$y^{(k)}(t_0) = \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$



Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- Nulla bemeneti stabilitás definíciója

Egy lineáris időinvariáns rendszert tetszőleges, nem minden esetben zérus kezdeti feltételek esetén nulla bemeneti stabilitásúnak nevezünk, ha megválasztható egy M korlát

$$\exists M(y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) > 0,$$

úgy, hogy

$$|y(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq t_0$$

és $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$



Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- Ha egy rendszerben konstans nulla bemenet és adott, legalább egy esetben nemzérus kezdeti feltételek esetén a kimenet nullához tart tetszőlegesen nagy idő eltelte után, akkor ezt a rendszert **nulla bemeneti stabilitásúnak** (vagy **aszimptotikusan stabilnak**) nevezzük.

Egyébként a rendszer **instabil**.



Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- a stabilitás feltétele

$$|y(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) \cdot y^{(k)}(t_0) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(t)| \cdot |y^{(k)}(t_0)|$$

mivel a kezdeti feltételek végesek

$$y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g_k(t)| < \infty, \quad \forall t \geq t_0$$



Stabilitás – Általános feltétel

- Induljunk ki

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

- inhomogén differenciálegyenlet
megoldás: homogén általános megoldása +
inhomogén partikuláris megoldása



Stabilitás – Általános feltétel

- homogén egyenlet:

egyenlet bal oldala nullával egyenlővé téve

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0$$

bal oldalon kimenet és deriváltjai

ennek megoldása a magára hagyott rendszer válasza

⇒ **nulla bemeneti stabilitás**

- inhomogén megoldás: új egyensúlyi állapot jellemzőinek meghatározása



Stabilitás – Általános feltétel

- A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t}$$

ahol p_1, p_2, \dots, p_n a homogén egyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet gyökei, c_i konstansok

- aszimptotikus stabilitás: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$
- teljesül: ha ezek a gyökök negatív valósak, vagy negatív valós részű komplex gyökpárok:

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0, \quad \forall p_i, i=1, \dots, n$$



Stabilitás – Általános feltétel

- Megjegyzés: a homogén egyenlet $y(t)$ megoldása tulajdonképpen a rendszer súlyfüggvénye

{hiszen $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

így, ha $u(t) = \delta(t)$

akkor $Y(s) = G(s) \Rightarrow y(t) = h(t) = L^{-1}(G(s))$ }

azaz a stabilitás

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$



Stabilitás – Általános feltétel

- Operátor tartományban
 - Átviteli függvény

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

ahol a p_1, p_2, \dots, p_n gyökök a nevező polinomjának gyökei, azaz a pólusok, és megfelelnek a homogén differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökeinek

- Így a rendszer stabilitáshoz ezeknek a gyököknek az előjelét kell ellenőrizni \Rightarrow komplex sík baloldali félsíkjára esnek-e



Stabilitás – Általános feltétel

- Inhomogén egyenlet

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- legyen $u(t) = 1(t)$ ugrásjel
- ekkor a megoldás általános alakja

$$y(t) = K(1(t) + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t})$$

ahol $K = b_0/a_0$ a rendszer erősítése

- így stabil rendszer esetén: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$



Folytonos idejű I/O modellek stabilitása

- Tétel: **Aszimptotikus stabilitás**

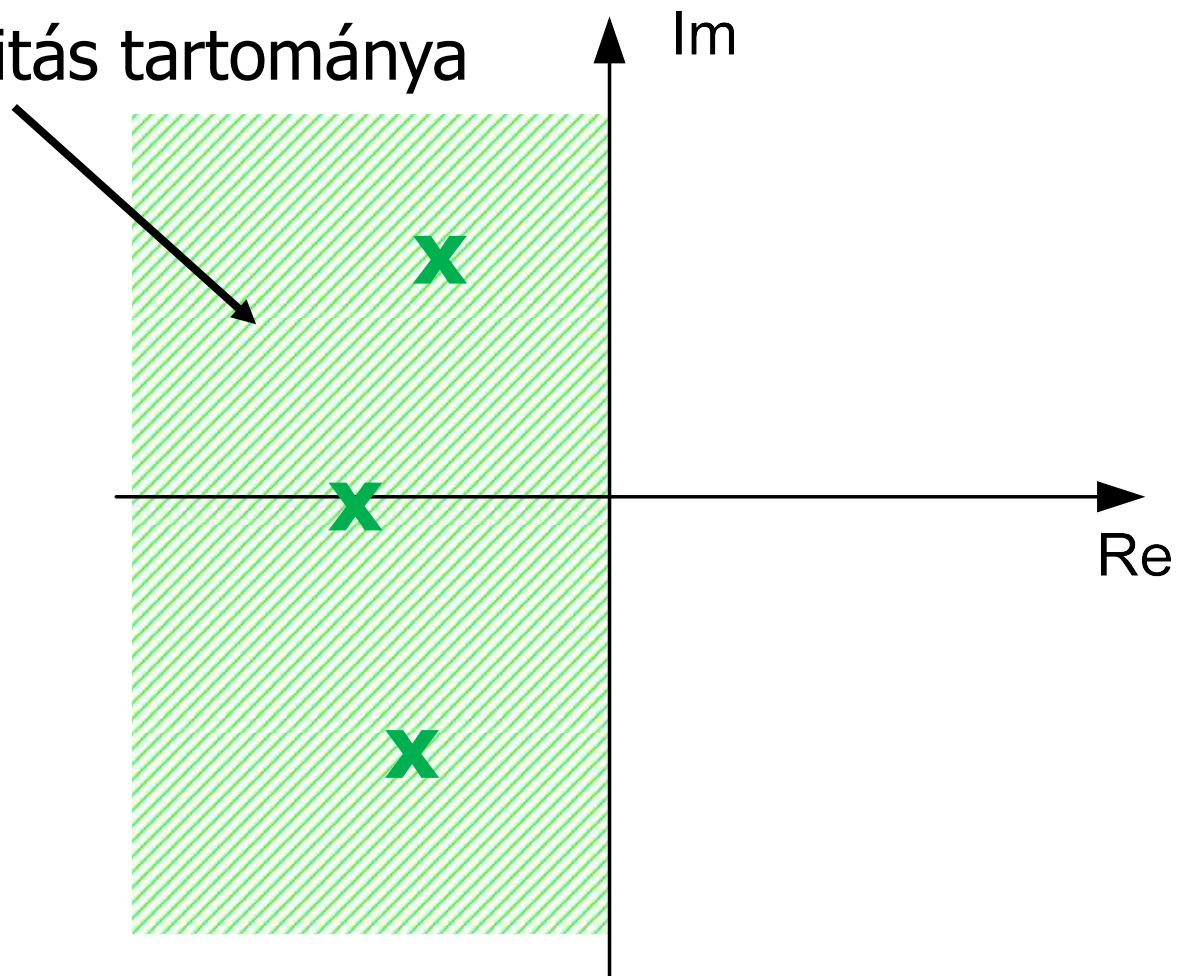
a) Egy folytonos idejű I/O modell akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha az eredő átviteli függvényének valamennyi pólusának valós része negatív:

$$\text{a rendszer stabil} \Leftrightarrow \forall p_i: \operatorname{Re}(p_i) < 0$$

azaz a komplex síkon ábrázolva a pólusokat valamennyi a képzetes tengelytől balra helyezkedik.

Folytonos idejű I/O modellek stabilitása

stabilitás tartománya





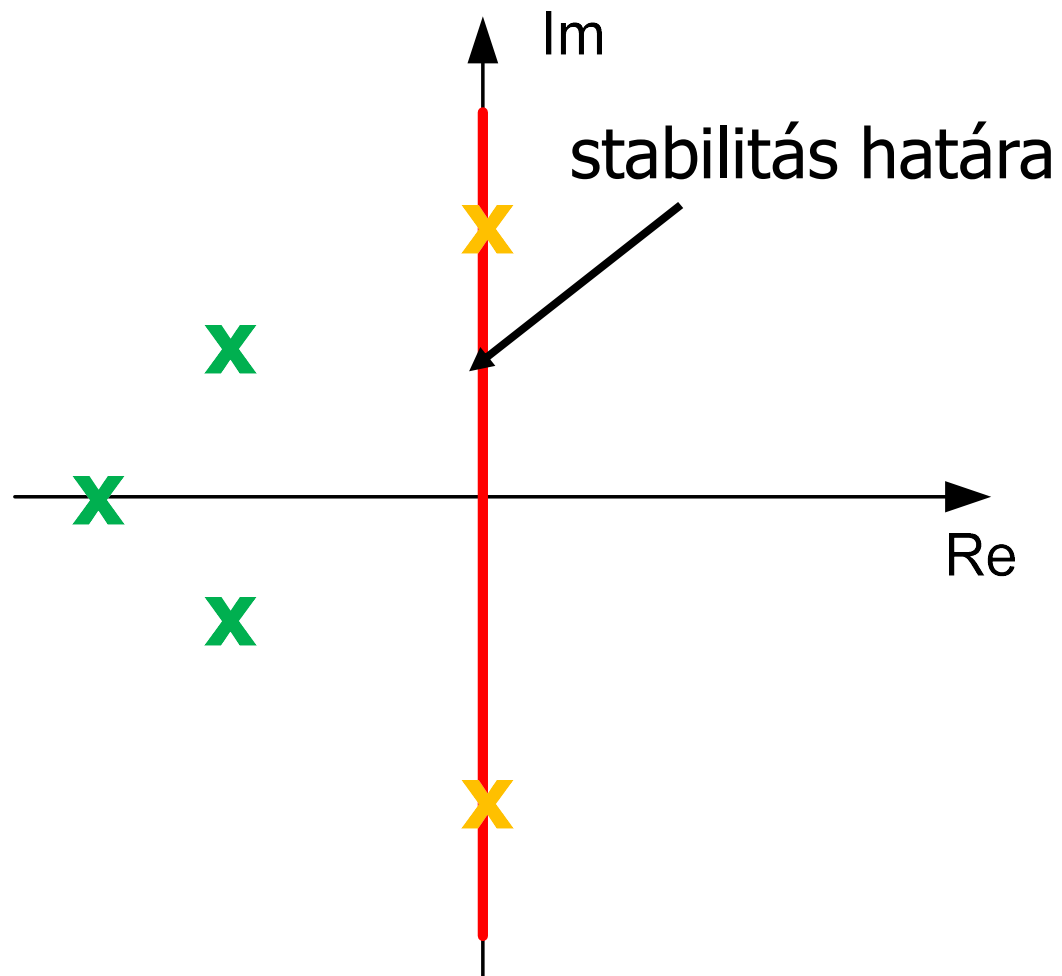
Folytonos idejű I/O modellek stabilitása

b) ha van(nak) a rendszer eredő átviteli függvényének olyan pólusa(i), amely(ek)nek az valós része 0, de nincs pozitív valós részű pólusa, akkor a rendszer a stabilitás határán van, azaz aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil::

stabilitás határa $\Leftrightarrow \exists p_k: \operatorname{Re}(p_k) = 0, \forall p_i (i \neq k): \operatorname{Re}(p_i) \leq 0$

azaz a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, van(nak) olyan(ok) ami(k) a képzetes tengelyen helyezkednek el, az esetlegesen létező többi pedig a bal oldali félsíkon.

Folytonos idejű I/O modellek stabilitása





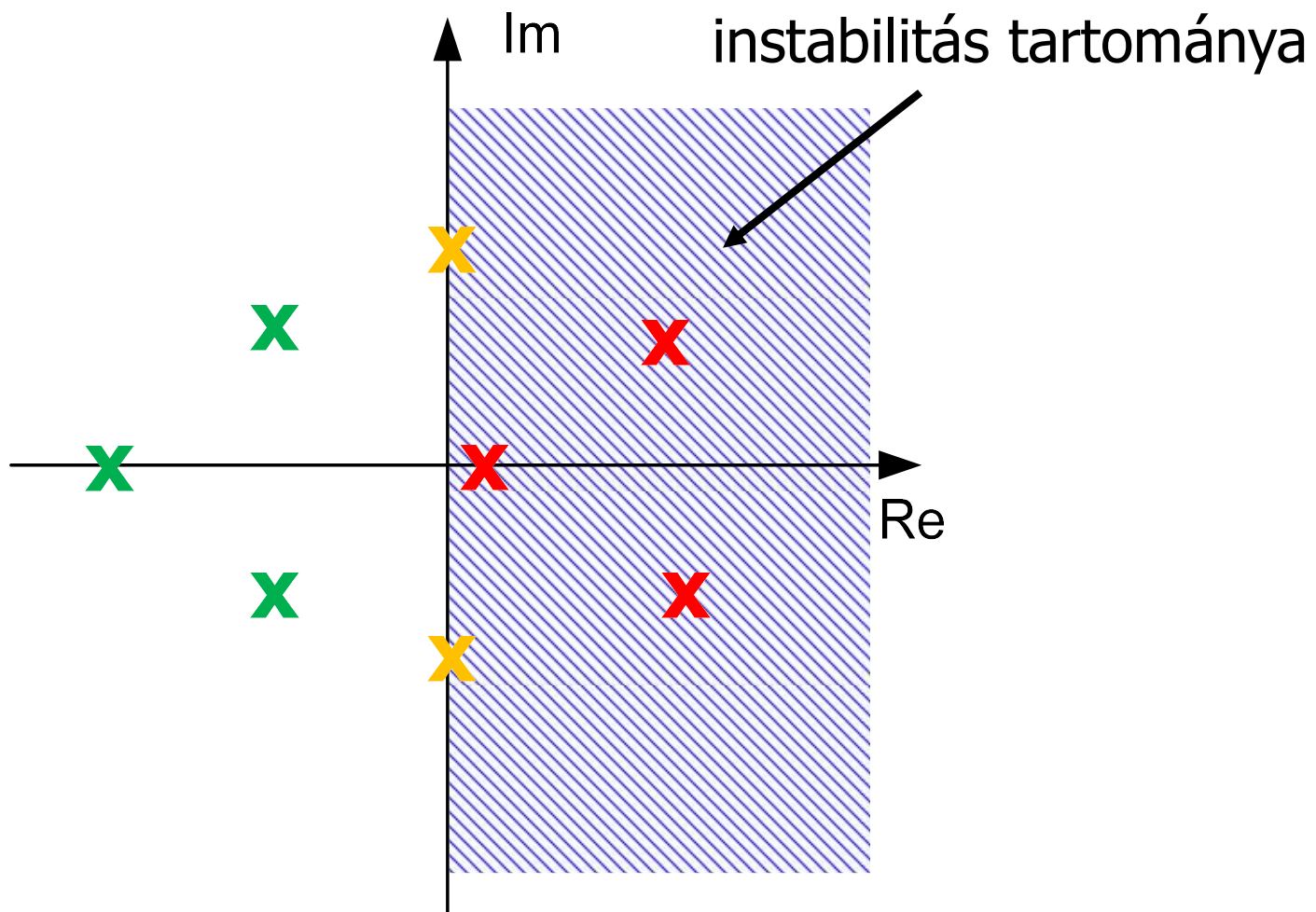
Folytonos idejű I/O modellek stabilitása

c) ha van a rendszer eredő impulzus átviteli függvényének legalább egy olyan pólusa, amelynek a valós része pozitív, akkor a rendszer instabil:

$$\text{a rendszer instabil} \Leftrightarrow \exists p_i: \operatorname{Re}(p_i) > 0$$

azaz a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, van(nak) olyan(ok) ami(k) a képzetes tengelytől jobbra helyezkednek el, a többi pólus elhelyezkedése lényegtelen.

Folytonos idejű I/O modellek stabilitása





Stabilitás definíciók összehasonlítása

- BIBO stabilitás: korlátos bemenetre korlátos válasz
- Aszimptotikus stabilitás:
 - nulla bemenet és nem zérus kezdeti feltételek esetén nullához tartó kimenet
 - ugrás jel bemenetre az erősítés által meghatározott végértékhez tartó válasz



- Aszimptotikusan stabil rendszer \Rightarrow BIBO stabil is
- BIBO stabil rendszer nem feltétlenül aszimptotikusan stabil



Példák

$$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3$$

$$G_2(s) = \frac{20}{(s-1)(s^2+2s+1)}$$

$$p_1 = 1, p_{2,3} = -1$$

$$G_3(s) = \frac{20(s+1)}{(s+2)(s^2+4)}$$

$$p_1 = -2, p_{2,3} = \pm 2j$$

$$G_4(s) = \frac{20}{(s+0,5)(s^2-0,2s)}$$

$$p_1 = -0,5, p_2 = 0, p_3 = 0,2$$

$$G_5(s) = \frac{20s^3}{(s+0,5)(s+0,2)}$$

nem realizálható



Stabilitásvizsgálati módszerek

- szükségességük
- fajtáik
 - algebrai: Routh-Hurwitz módszer
 - frekvenciatartomány: Nyquist-kritérium
Bode-kritérium
 - geometriai: gyökhelygörbe módszer



Routh-Hurwitz kritérium

- módszercsalád
 - Routh-kritérium
 - Hurwitz-kritérium
- cél:
 - egy tag átviteli függvényének vagy egy tagcsoport az eredő átviteli függvényének karakterisztikus egyenlete alapján a stabilitás meghatározása
 - paraméteres stabilitásvizsgálat



Routh-Hurwitz kritérium

- kiindulás
 - egy tag átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad K(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- sorba kapcsolt tagok eredője:

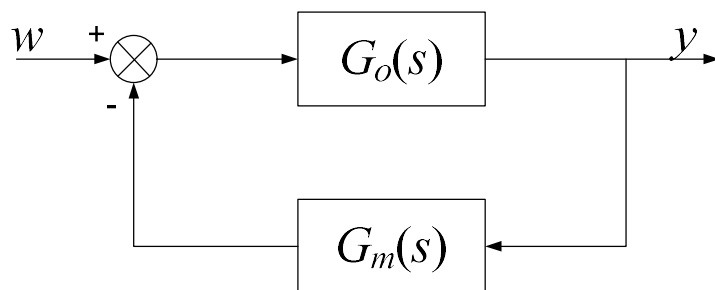
$$G_e(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

ennek karakterisztikus polinomja

$$K(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Routh-Hurwitz kritérium

- vagy legyen visszacsatolt rendszer:



$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_m(s)}$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$K(s) = 1 + G_o(s)G_m(s)$$

illetve polinom alakban:

$$K(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Routh-Hurwitz kritérium

- A stabilitás szükséges és elégséges feltétele:

- I. Minden együttható legyen pozitív

$$\forall a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

- II. A H Hurwitz-determináns valamennyi főátlóra támaszkodó aldeterminánsa legyen pozitív:

$$H_{n \times n} = \begin{array}{c} \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \dots \quad \Delta_n \\ \left| \begin{array}{cccccc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{array} \right| \end{array} \quad \Delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

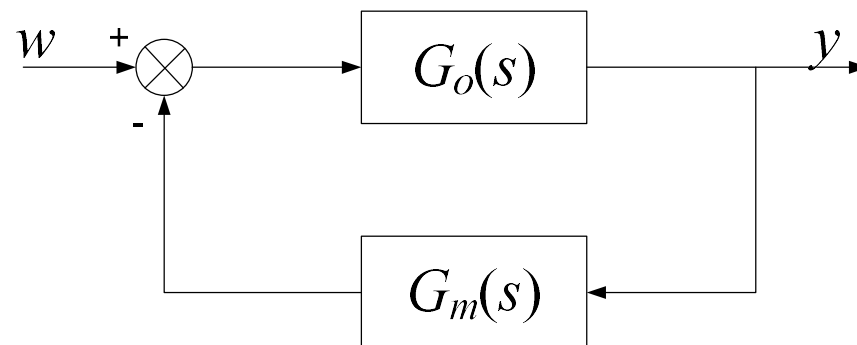


Routh-Hurwitz kritérium

- Paraméteres stabilitás vizsgálat
 - A vizsgálatot a tag vagy a tagcsoport valamelyik paraméterének (pl.: erősítés, időállandó, csillapítási tényező) tetszőleges értéke mellett végezzük el.
 - A paramétert tartalmazó együtthatót változóként hagyjuk.
 - Meghatározzuk, hogy milyen intervallumban teljesülhet a Hurwitz kritériumban megszabott feltétel.

Nyquist-kritérium

- a hurokátviteli függvényen alapuló geometria kritérium
- alapelv: a felnyitott kör helygörbájéből következtetünk a zárt rendszer stabilitási viszonyaira
- kiindulás





Nyquist-kritérium

- Az átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_m(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G(s)}$$

- A karakterisztikus egyenlet:

$$1 + G(s) = 0$$

melyből a pólusokat megkapjuk

- Áttérve frekvenciatartományba

$$1 + G(j\omega) = 0$$



Nyquist-kritérium

- Az $1+G(j\omega)=0$ összefüggés fizikai értelme:
 - van-e a zárt rendszernek csillapítatlan szinuszos rezgésű állandósult megoldása, azaz

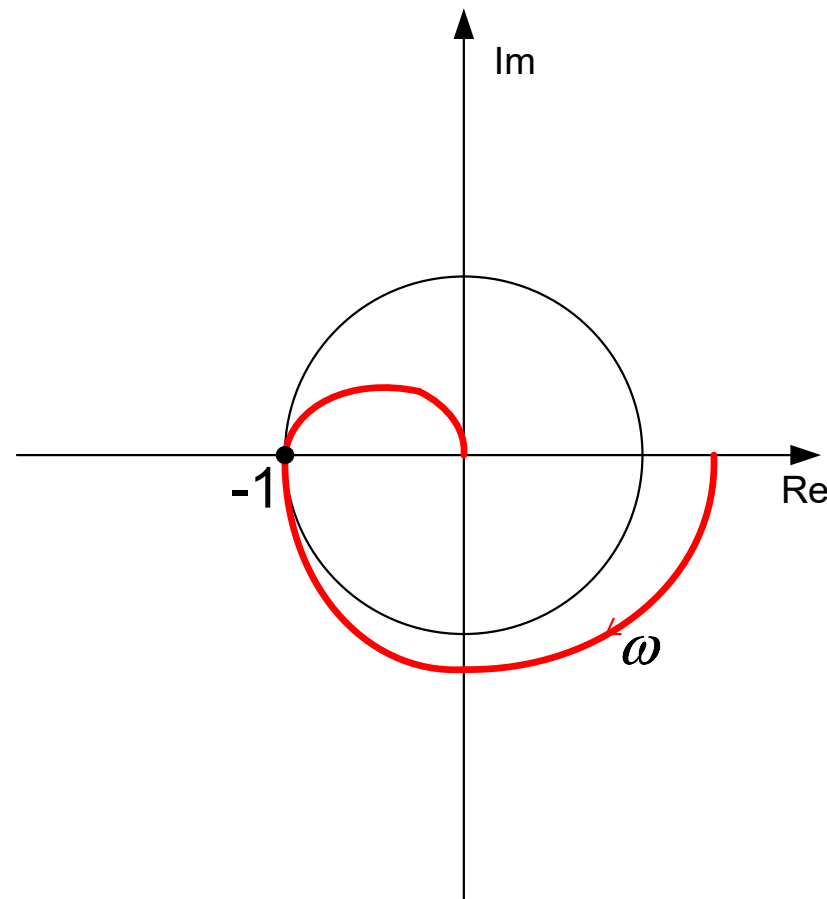
$$\exists \omega_0 : G(j\omega_0) = -1$$

- ha igen: akkor ezzel az ω_0 frekvenciával gerjesztve a zárt rendszert, csillapítatlan rezgéseket kapunk

Nyquist-kritérium

- **a stabilitási kritérium:**

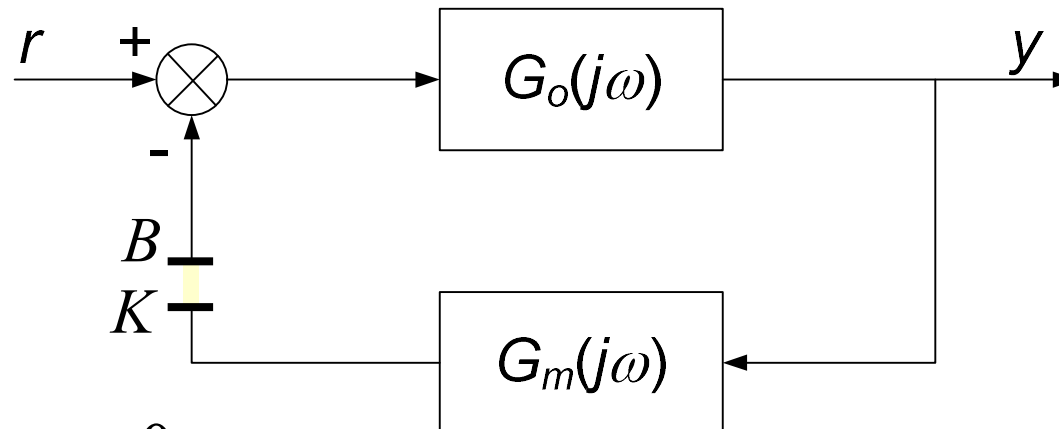
Ha a felnyitott kör $G(j\omega)$ amplitúdó-fázis görbéje – miközben frekvencia $0 \leq \omega < \infty$ tartományon változik – éppen áthalad a komplex számsík -1 pontján, akkor a visszacsatolt rendszer a stabilitás határán van



Nyquist-kritérium

- *Magyarázat:*

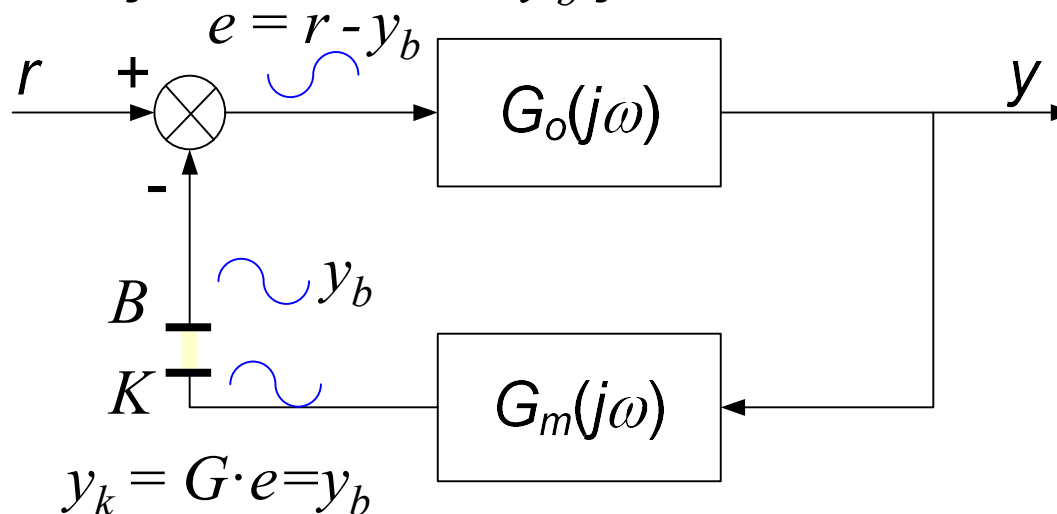
Induljunk ki a visszacsatolt körből:



- legyen $r = 0$
- vágjuk fel a kört a $B - K$ pontok között
- legyen az így kapott felnyitott kör Nyquist-diagramja olyan, hogy átmegy a -1 ponton

Nyquist-kritérium

- gerjesszük a rendszert a B pontban ω_0 frekvenciájú szinuszos y_b jellel



- a különbségképző után $e = -y_b$
- a K ponton pedig ismét y_b jelenik meg:

$$y_k = G(j\omega_0)e = \underbrace{G_o(j\omega_0) \cdot G_m(j\omega_0)}_{=-1} e = -e = y_b$$



Nyquist-kritérium

- összekötés után is fenn marad ez a jel, a gerjesztés megszűnése esetén is
- valós rendszer – egységugrás gerjesztés



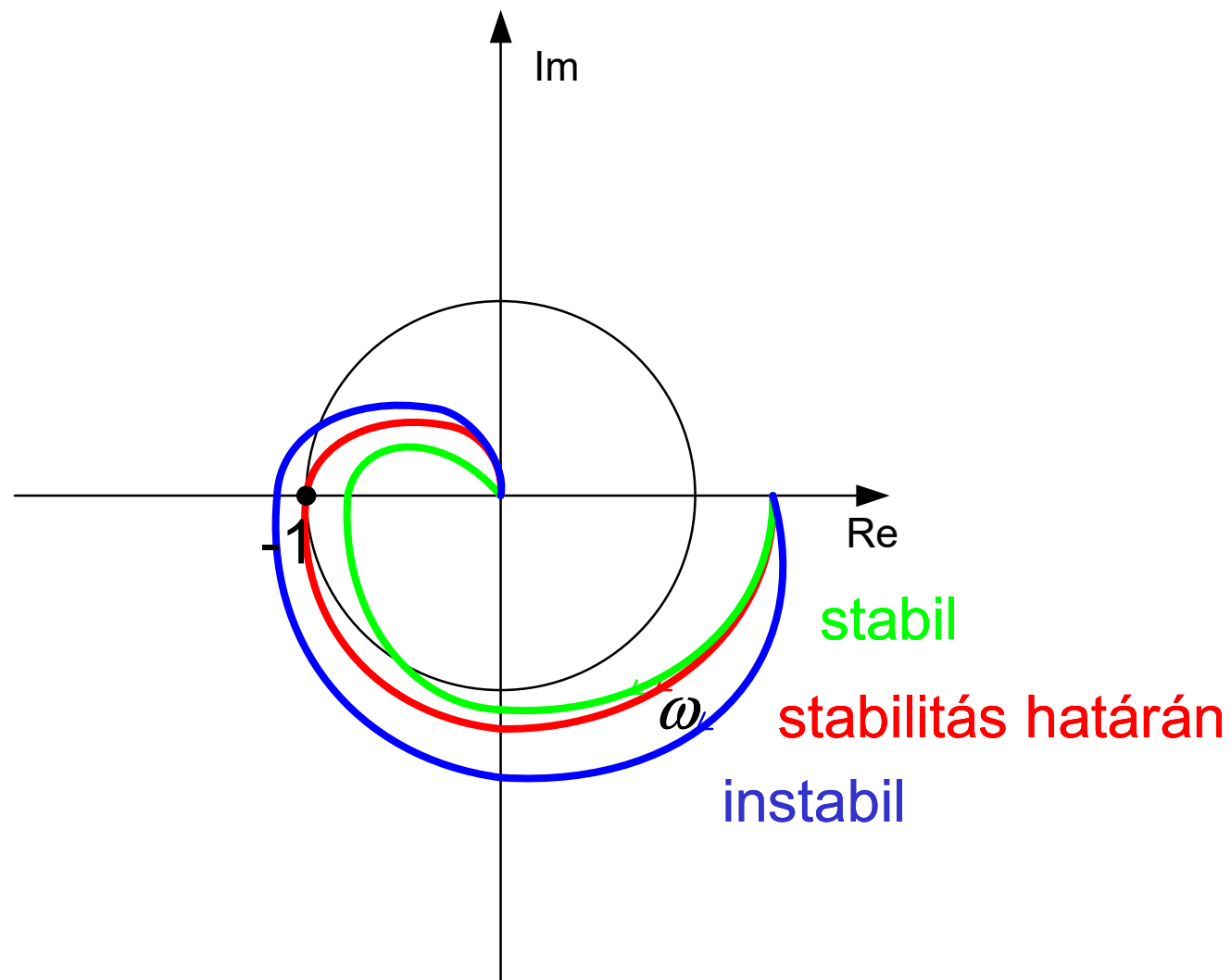
Nyquist-kritérium

Nyquist-stabilitási kritérium

Ha a felnyitott kör Nyquist görbéje a valós tengelyt először

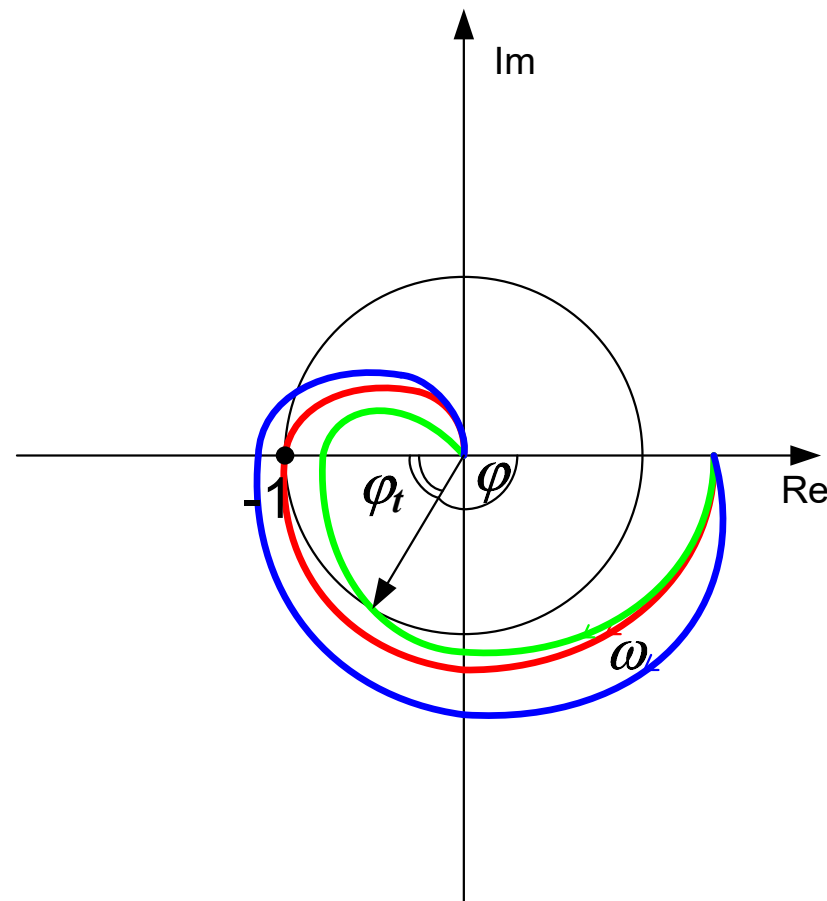
- a -1 ponttól jobbra metszi, azaz a metszéspont 0 és -1 között van, akkor a zárt kör stabil;
- pontosan a -1 pontban metszi, akkor a zárt kör a stabilitás határán van;
- a -1 ponttól balra metszi, azaz a metszés pont -1 és $-\infty$ között van, akkor a zárt kör instabil.

Nyquist-kritérium



Nyquist-kritérium

- fázis tartalék: $\varphi_t = \pi - \varphi$
 - ha $\varphi < \pi$, $\varphi_t > 0 \Rightarrow$
a rendszer stabil
 - ha $\varphi = \pi$, $\varphi_t = 0 \Rightarrow$
a rendszer stabilitás
határán
 - ha $\varphi > \pi$, $\varphi_t < 0 \Rightarrow$
a rendszer instabil
 - általában $\varphi_t > \pi/6$ legyen

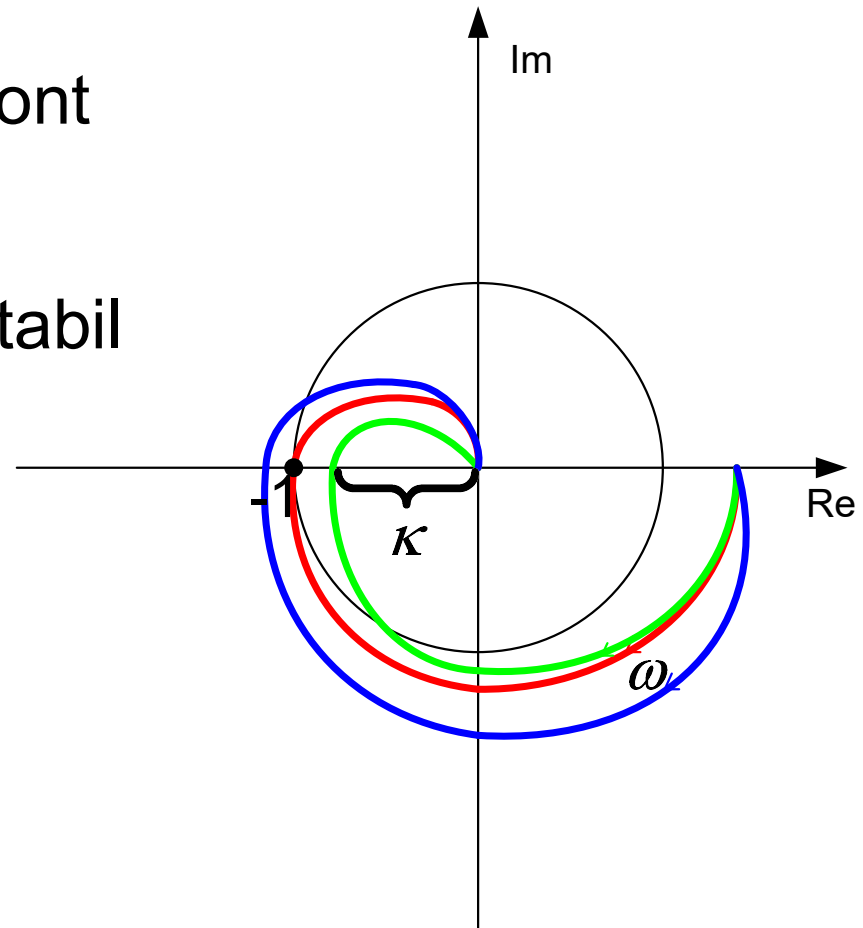


Nyquist-kritérium

- erősítési tartalék

κ = az origó és a metszéspont közötti távolság

- ha $\kappa < 1 \Rightarrow$ a rendszer stabil
- ha $\kappa = 1 \Rightarrow$ a rendszer stabilitás határán
- ha $\kappa > 1 \Rightarrow$ a rendszer instabil

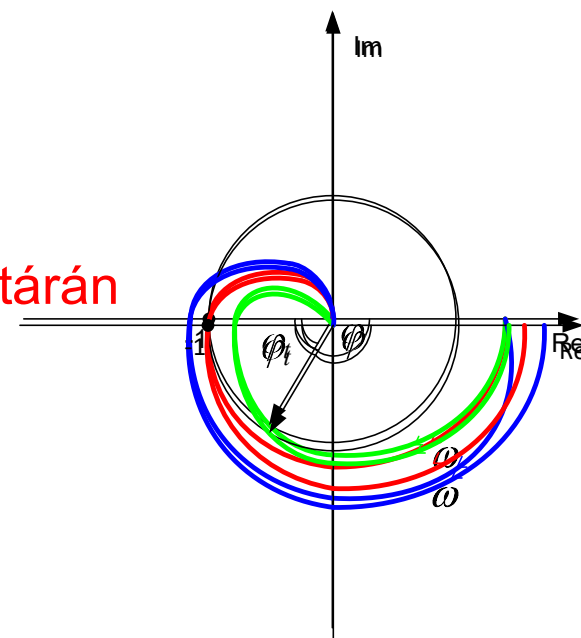
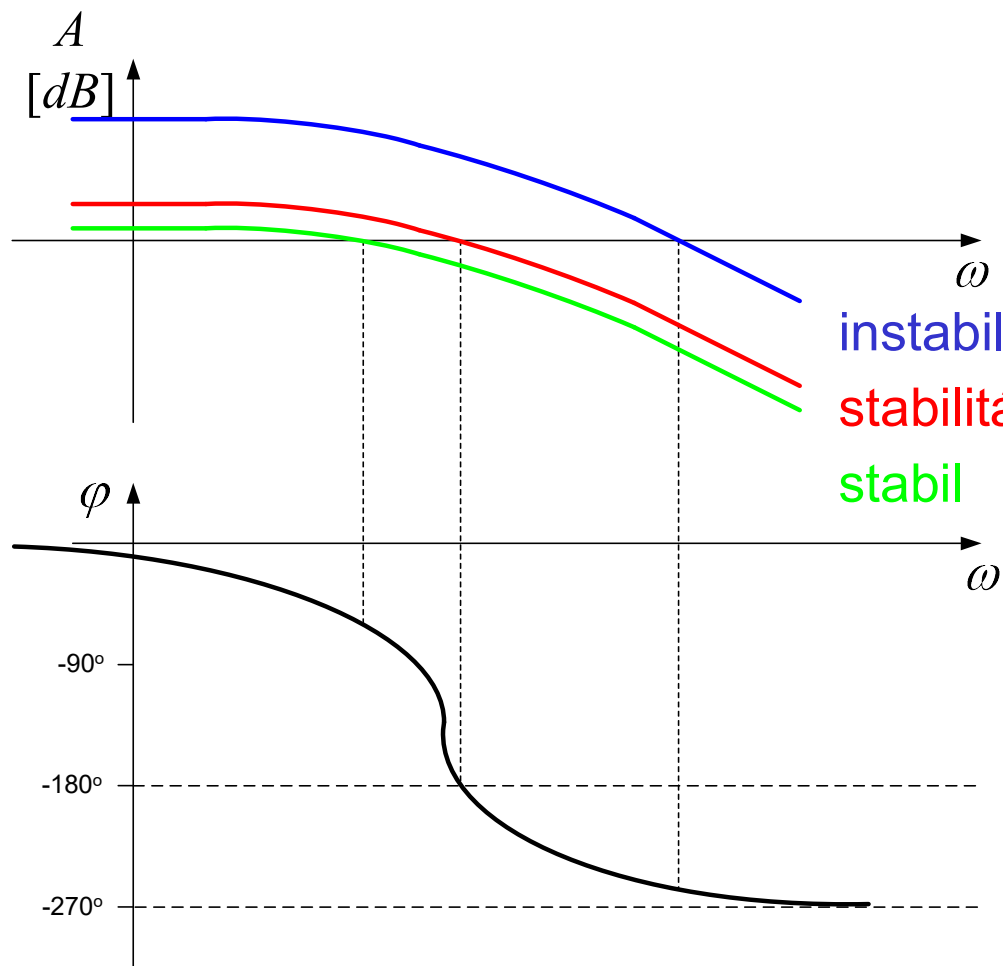




Bode-kritérium

- Bode diagram: a frekvencia függvényében az amplitúdó-viszony és fázisszög ábrázolása
- Nyquist diagram egység sugarú kör \Rightarrow
Bode diagram 0 dB tengely
- Bode kritérium alapja: az amplitúdógörbe és a 0 dB tengely metszés pontjához milyen fázis szög érték tartozik

Bode-kritérium





Bode-kritérium

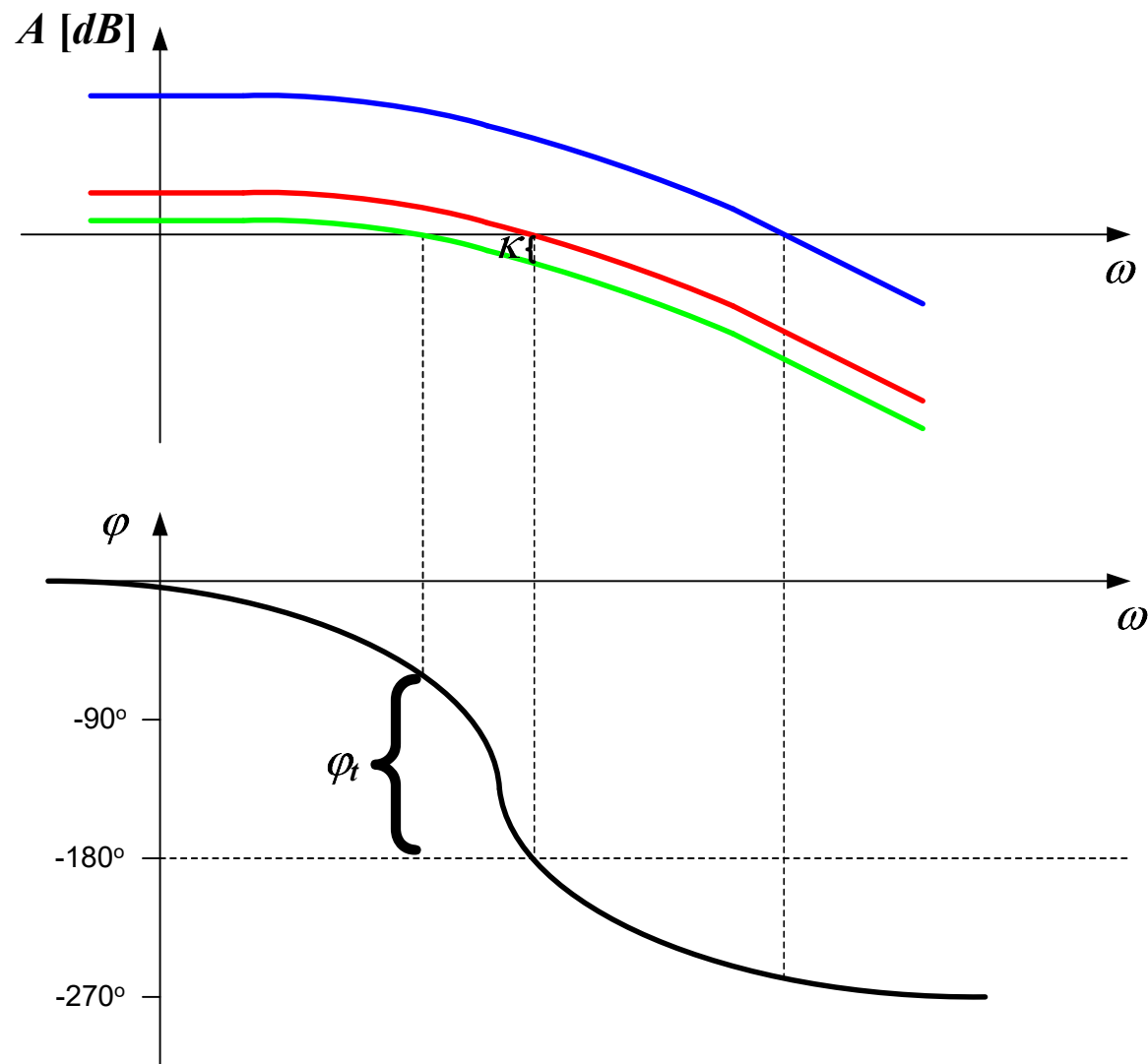
- Stabilitási kritérium:

Ha az amplitúdógörbe és a 0 dB-es tengely metszéspontjához tartozó φ fázisszög

- nagyobb -180° -nál, akkor a rendszer stabil;
- egyenlő -180° -kal, akkor a rendszer a stabilitás határán van;
- ha kisebb -180° -nál, akkor instabil.

Bode-kritérium

- Erősítési tartalék
 - $|\kappa|$ [dB]
 - fizikai értelmezés
- Fázistartalék
 - φ_t





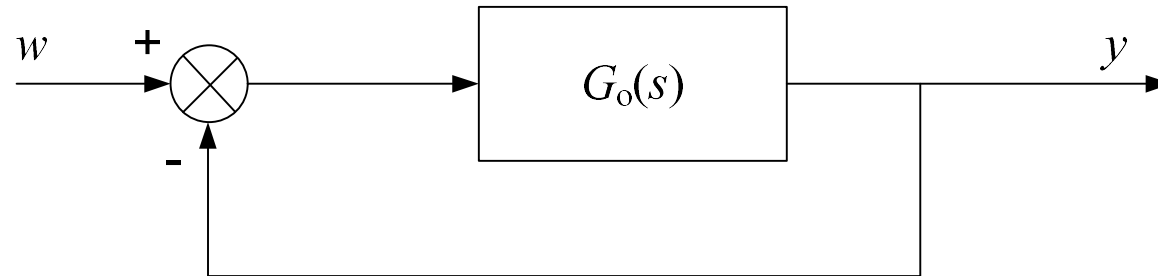
Gyök helygörbe

- módszer célja:
 - stabilitásvizsgálat
 - minőségi jellemzők hozzávetőleges meghatározása
- Evans, 1948
- alkalmazható SISO és MIMO rendszerekre
- Def.:

A gyök helygörbe a zárt rendszer pólusainak mértani helye a komplex síkon, miközben a rendszer valamely paraméterét zérus és végtelen között változtatjuk.

Gyök helygörbe

- kiindulás



- legyen

$$G_o(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdot \dots \cdot (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdot \dots \cdot (s + p_n)}$$

ahol K - erősítés,

$-z_1, \dots, -z_m$ – zérushelyek,

$-p_1, \dots, -p_n$ - pólusok



Gyök helygörbe

- a visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K(s + z_1) \cdot \dots \cdot (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot \dots \cdot (s + p_n) + K(s + z_1) \cdot \dots \cdot (s + z_m)}$$

- a karakterisztikus egyenlet:

$$(s + p_1) \cdot \dots \cdot (s + p_n) + K(s + z_1) \cdot \dots \cdot (s + z_m) = 0$$

azaz a gyök helygörbe most a karakterisztikus egyenlet gyökeinek mértani helye a komplex síkon, midőn az **erősítést** 0 és ∞ között változtatjuk



Gyök helygörbe

- a karakterisztikus egyenletet átalakítva:

$$\frac{K(s + z_1) \cdot \dots \cdot (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot \dots \cdot (s + p_n)} = -1$$

- azaz $G_o(s) = -1$
- miután általános esetben a gyökök komplexek, és a komplex számok felírhatók $z = A \cdot e^{j\varphi}$ vagy $z = A \angle \varphi$ alakban, így

$$-1 = e^{\pm j l \pi} \quad \text{ahol } l = 1, 3, 5, \dots$$

vagy
$$-1 = 1 \angle \pm l \cdot 180^\circ$$



Gyök helygörbe

- Összefoglalva:

A gyök helygörbe bármely pontjának két feltételt kell kielégítenie: a valós és a képzetes részeknek a

$$\frac{K(s + z_1) \cdot \dots \cdot (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot \dots \cdot (s + p_n)} = -1$$

egyenlet mindkét oldalán külön-külön meg kell egyezniük.

- Ennek ellenőrzése:
 - szögfeltétel
 - abszolút érték feltétel



Gyök helygörbe

- legyen a k -dik zérushely: $s + z_k = C_k e^{j\gamma_k} = C_k \angle \gamma_k$
- legyen a i -dik pólus: $s + p_i = D_i e^{j\delta_i} = D_i \angle \delta_i$
- ekkor a szögfeltétel:

$$\angle \gamma_1 + \dots + \angle \gamma_m - \angle \delta_1 - \dots - \angle \delta_n = \sum_{k=1}^m \angle \gamma_k - \sum_{i=1}^n \angle \delta_i = \pm l \cdot 180^\circ$$

azaz egy s pont akkor és csak akkor tartozik a gyök helygörbéhez, ha a zérushelyekből kiinduló és az s -be mutató vektorok szögének összegéből levonva a pólusokból kiinduló és az s -be mutató vektorok szögeinek összegét, akkor $l \cdot 180^\circ$ -t kapunk (ahol $l = 1, 3, 5, \dots$).



Gyök helygörbe

- az abszolút érték feltétel:

$$\frac{|s + z_1| \cdot |s + z_2| \cdot \dots \cdot |s + z_m|}{|s + p_1| \cdot |s + p_2| \cdot \dots \cdot |s + p_n|} = \frac{\prod_{k=1}^m C_k}{\prod_{i=1}^n D_i} = \frac{1}{|K|} = \frac{1}{K}$$

azaz egy s pont akkor és csak akkor tartozik a gyök helygörbéhez, ha a zérushelyekből az s -be mutató vektorok abszolút értékeinek szorzatát elosztva a pólusokból az s -be mutató vektorok abszolút értékeinek szorzatával, az erősítés reciprokát kapjuk meg.



Gyök helygörbe

- a gyök helygörbe előállítása
 - karakterisztikus egyenlet megoldásával
 - grafikus úton próbálgatással
 - szerkesztési módszerek
 - számítógépes programok
 - tulajdonságok alapján közelítve



Gyök helygörbe

- a gyök helygörbe tulajdonságai
 1. A gyök helygörbének annyi ága van, amennyi a **zárt** rendszer pólusainak a száma.
 2. A gyök helygörbe mindig szimmetrikus a valós tengelyre nézve.



Gyök helygörbe

3. Legyen n a pólusok száma, m a zérushelyek száma a felnyitott körben
- ha $n > m$, akkor a gyök helygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és m számú ág a felnyitott kör zérushelyeibe, $n - m$ számú ág a végtelenbe tart;
 - ha $n = m$, akkor a gyök helygörbe teljesen a végesben van;
 - ha $n < m$, akkor $m - n$ számú ág a végtelenből indul ki (nem reális eset, de a kiterjesztett gyök helygörbe vizsgálatnál előfordulhat).



Gyök helygörbe

4. A valós tengelyen akkor és csak akkor lehetnek gyök helygörbe szakaszok, ha a vizsgált ponttól jobbra a pólusok és a zérushelyek együttes száma páratlan.
5. A gyök helygörbe aszimptótáinak a valós tengellyel bezárt szögét az

$$\alpha = \frac{l \cdot 180^\circ}{n - m} \quad l = 1, 3, 5, \dots, 2(n - m) - 1$$

összefüggés adja meg.



Gyök helygörbe

6. A gyök helygörbe aszimptótái a valós tengelyt az alábbi összefüggés által meghatározott ún. **súlypont**ban metszik. Jelölje p_i a felnyitott kör i -dik pólusát, z_j a felnyitott kör j -dik zérusát. Ekkor az S súlypont értéke:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}\{p_i\} - \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}\{z_j\}}{n - m}$$



Gyök helygörbe

7. A gyök helygörbe és a képzetes tengely metszés-pontja, vagyis a stabilitáshatárához tartozó erősítési értékhez tartozó pólusok a korábban ismertetett Hurwitz determináns segítségével határozhatók meg.
8. A gyök helygörbe kilépése a valós tengelyből, vagyis a valós tengelynek az az x pontja, ahol többszörös gyököket kapunk a következő egyenlet segítségével határozható meg:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{x - z_j} = 0$$



Gyök helygörbe

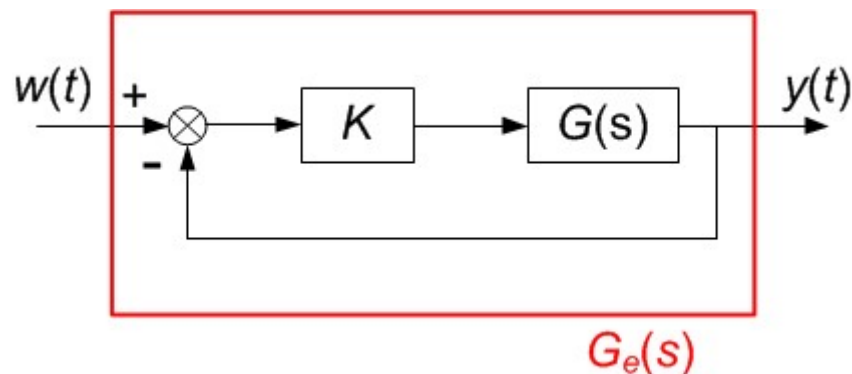
9. A gyök helygörbe kilépése a komplex pólusokból a szögfeltétel segítségével határozható meg, úgy, hogy felvesszünk egy pontot a pólushoz közel, és arra nézve megoldjuk a szögfeltételt:

$$\sum_{k=1}^m \angle \gamma_k - \sum_{i=1}^n \angle \delta_i = \pm l \cdot 180^\circ \quad \text{ahol } l = 1, 3, \dots, 2(n - m) - 1$$

Gyök helygörbe - példák

- példák csoportosítása
 - nevező fokszáma n ($n = 1, 2, 3$)
 - számláló fokszáma m ($m = 0, 1$)

- vizsgált kör

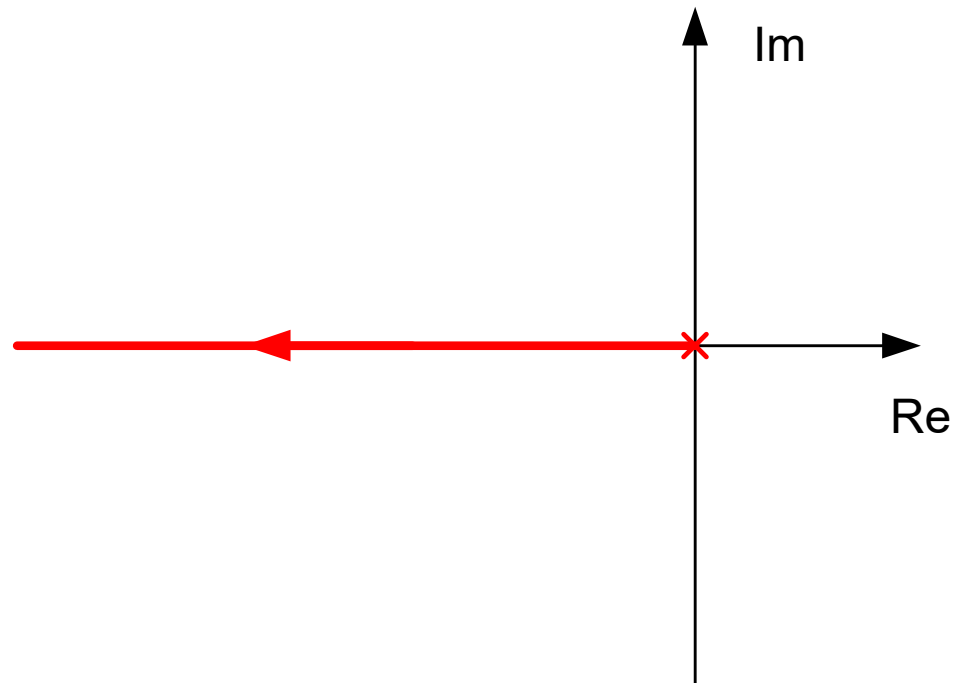


- ahol $K_G = 1, K = 0 \dots \infty$
- az eredő átviteli függvény:
$$G_e(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Gyök helygörbe - példák

- legyen $n = 1, m = 0$

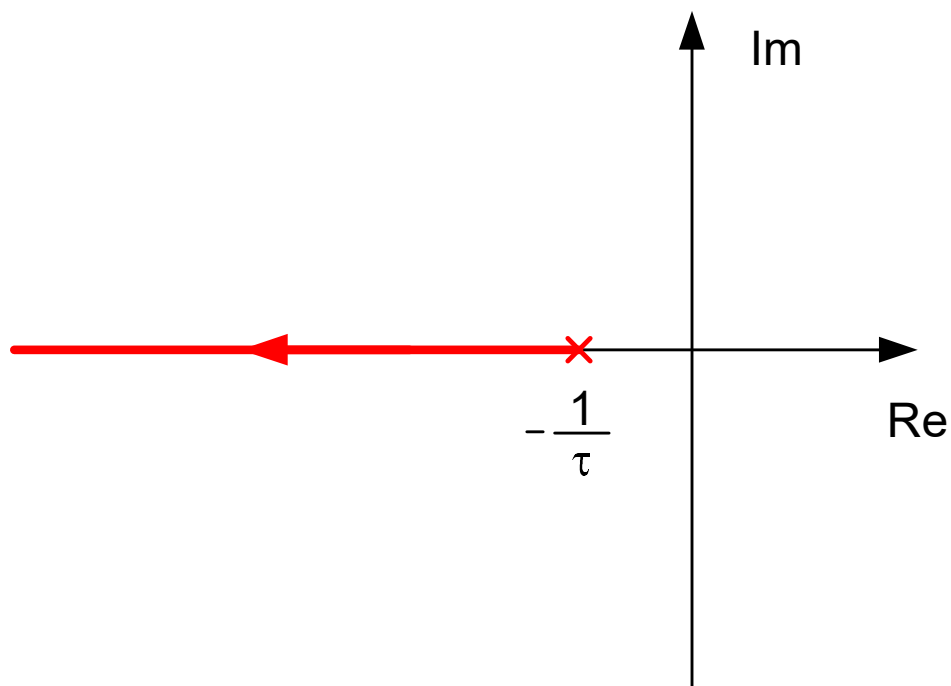
- ha $G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K \frac{1}{s}}{1 + K \frac{1}{s}} = \frac{K}{s + K}$



Gyök helygörbe - példák

- ha

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \Rightarrow G_e(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{\tau s + 1 + K}$$

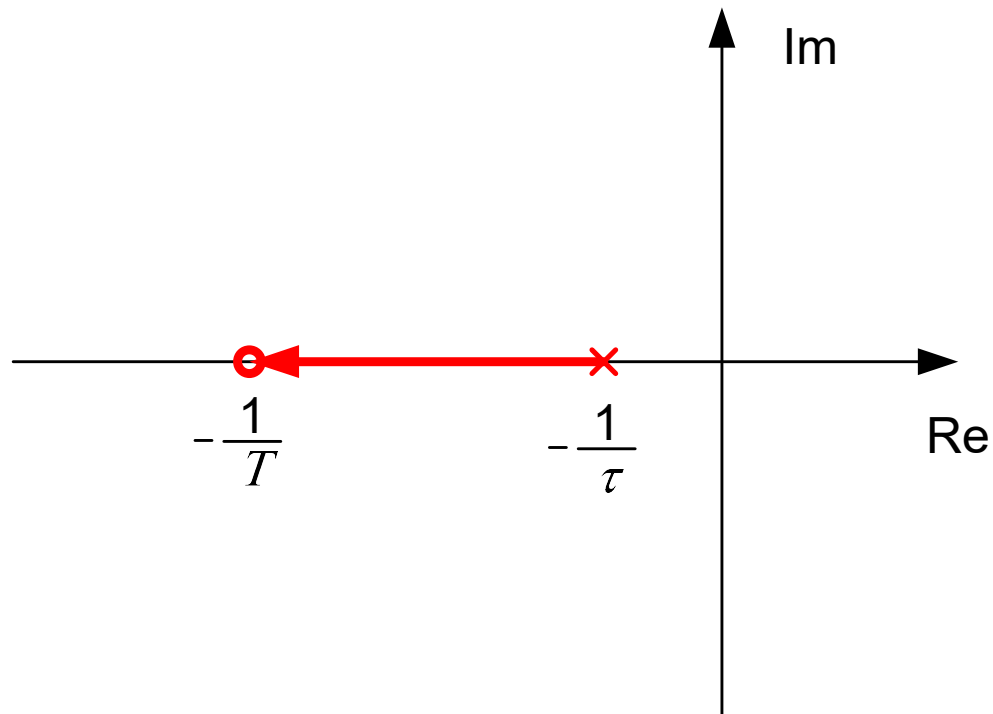


Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 1, m = 1$

$$G(s) = \frac{Ts + 1}{\tau s + 1} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K(Ts + 1)}{(\tau + KT)s + 1 + K}$$

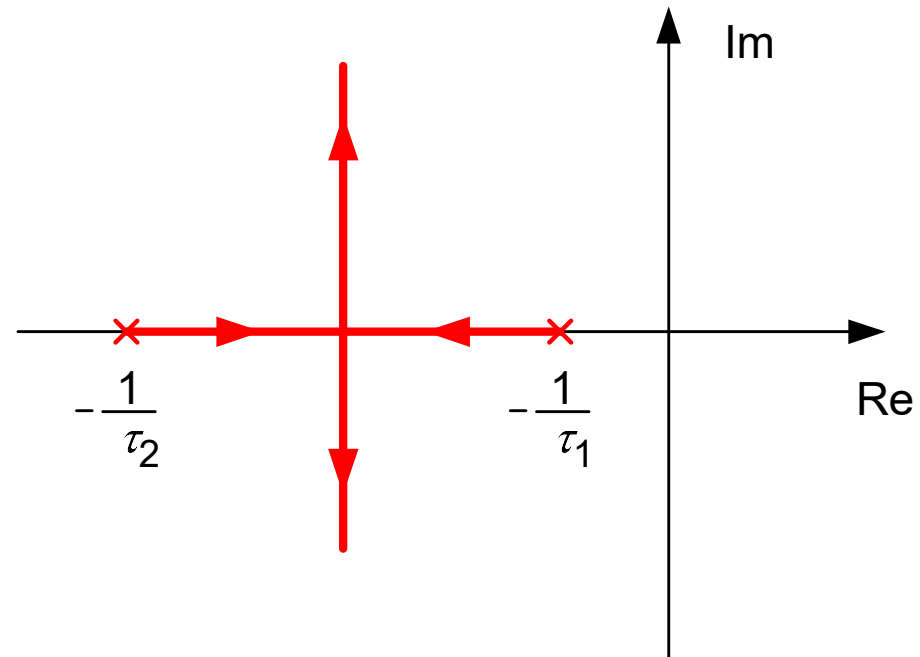
ha $\tau > T$



Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 2$, $m = 0$ és $\xi > 1$

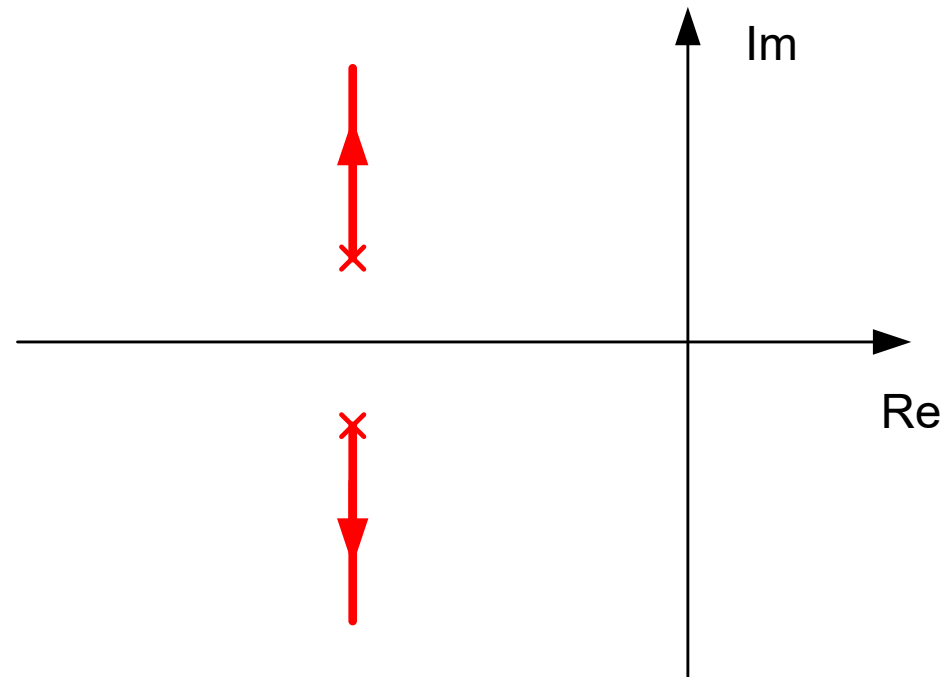
$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1 + K}$$



Gyök helygörbe - példák

- legyen $n = 2$, $m = 0$ és $0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 + K}$$

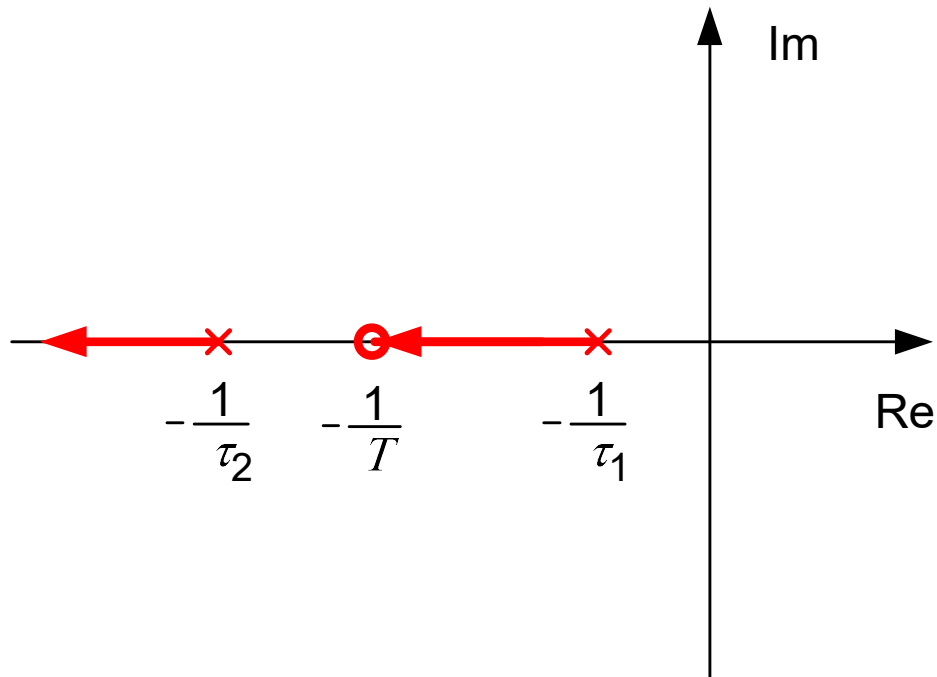


Gyök helygörbe - példák

- legyen $n = 2$, $m = 1$ és $\xi > 1$

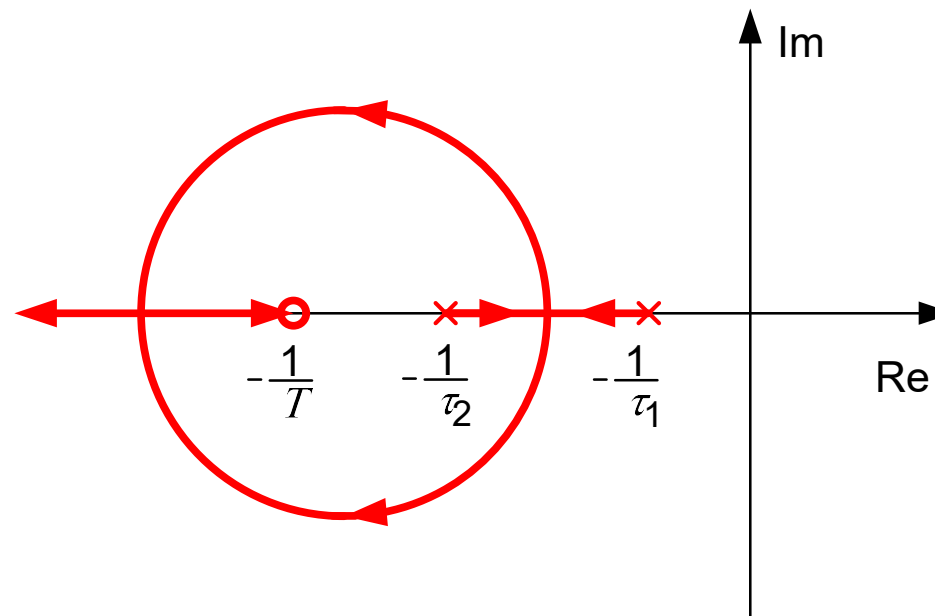
$$G(s) = \frac{Ts + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K(Ts + 1)}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + KT)s + 1 + K}$$

- ha $\tau_1 > T > \tau_2$



Gyök helygörbe - példák

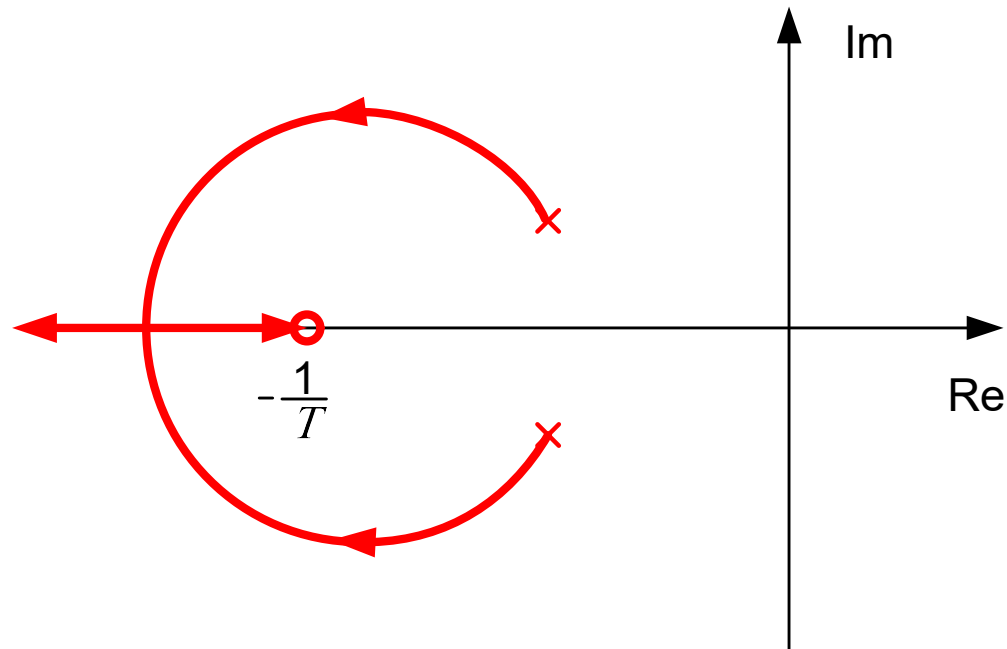
- ha $\tau_1 > \tau_2 > T$



Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 2$, $m = 1$ és $0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{Ts + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K(Ts + 1)}{\tau^2 s^2 + (2\xi\tau + KT)s + 1 + K}$$



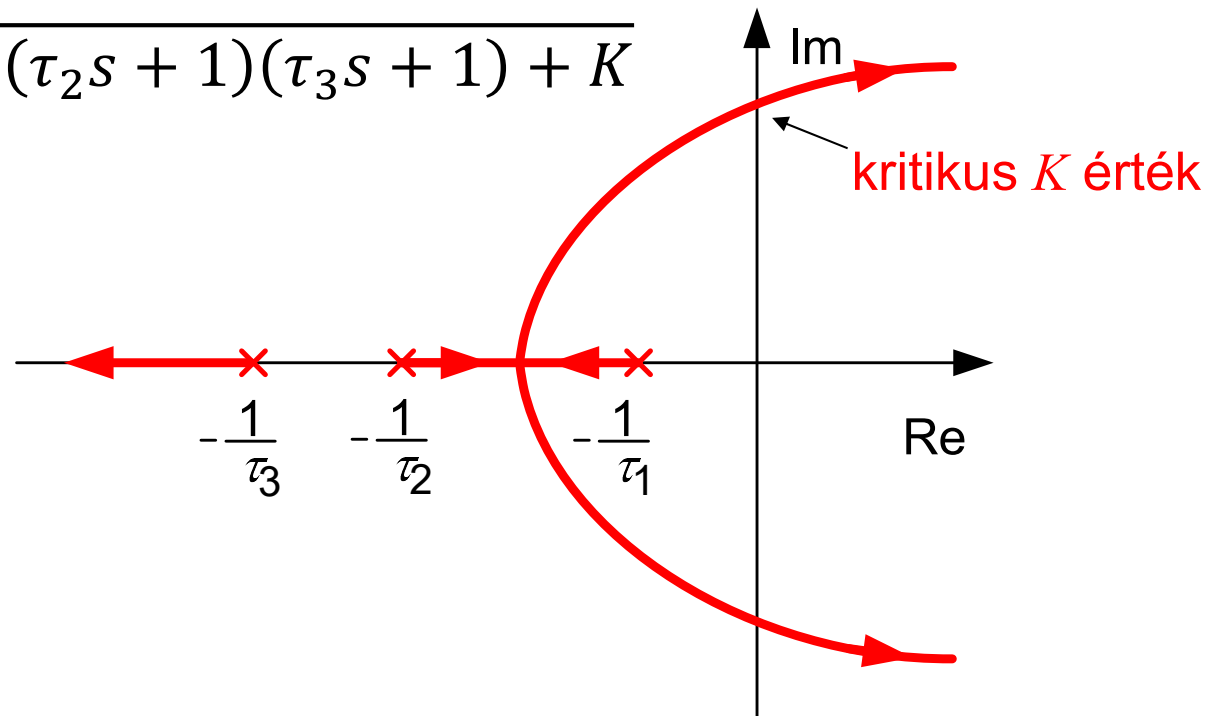
Gyök helygörbe - példák

- legyen $n = 3, m = 0$

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) + K}$$

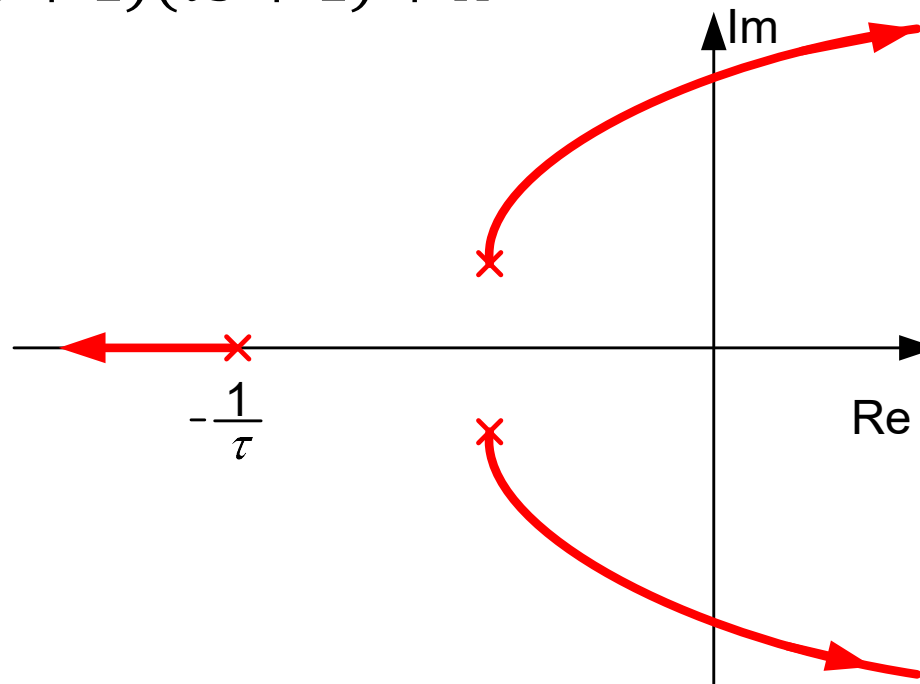
ha $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$



Gyök helygörbe - példák

$$G(s) = \frac{1}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)(\tau s + 1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)(\tau s + 1) + K}$$



Gyök helygörbe - példák

- legyen $n = 3, m = 1$

$$G(s) = \frac{Ts + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K(Ts + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) + K(Ts + 1)}$$

ha $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > T$

