

Kálmán-féle rendszermodell

Gerzson Miklós

Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

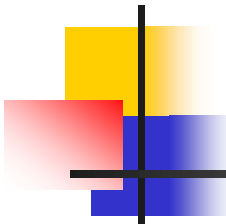
2019/2020 II. félév

Kálmán Rudolf (1930-2016)

Rudolf Emil Kalman was born in Budapest, Hungary, on May 19, 1930. He received the bachelor's degree (S.B.) and the master's degree (S.M.) in electrical engineering, from the Massachusetts Institute of Technology in 1953 and 1954 respectively. He received the doctorate degree (D. Sci.) from Columbia University in 1957. His major positions include that of Research Mathematician at R.I.A.S. (Research Institute for Advanced Study) in Baltimore, between 1958-1964, Professor at Stanford University between 1964-1971, and from 1971 to 1992 Graduate Research Professor, and Director, at the Center for Mathematical System Theory, University of Florida, Gainesville. Moreover, since 1973 he has also held the chair for Mathematical System

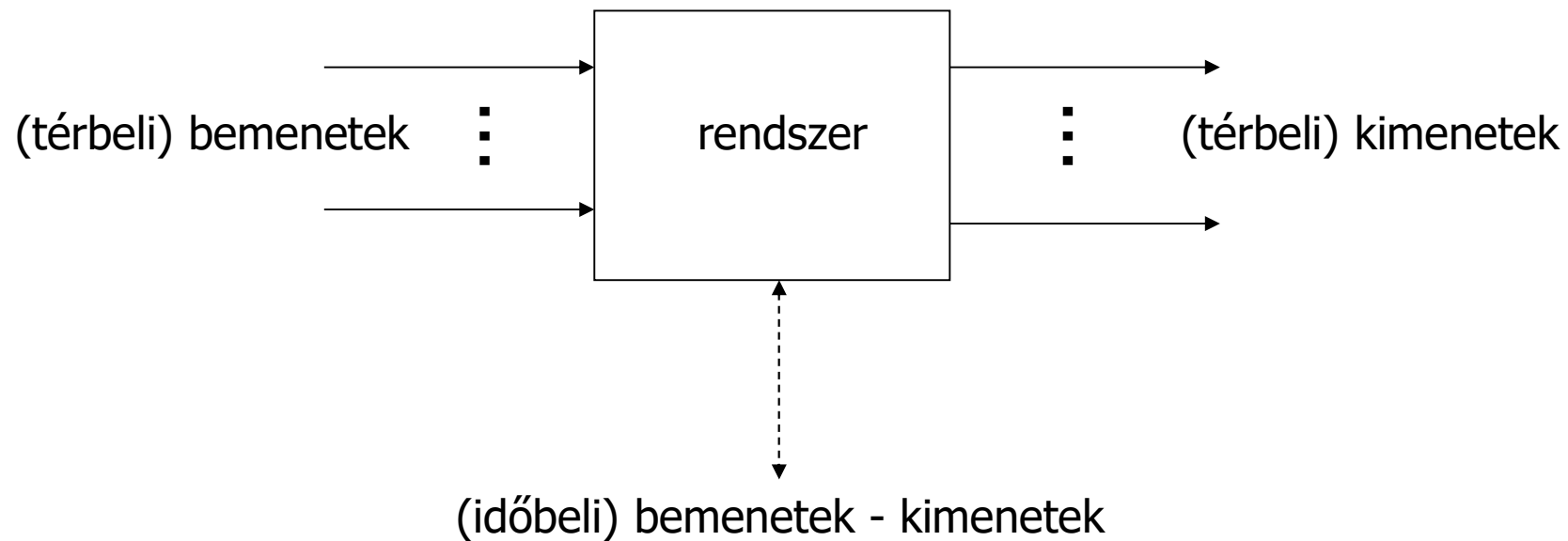


Theory at the ETH (Swiss Federal Institute of Technology) Zurich. He is the recipient of numerous awards, including the *IEEE Medal of Honor* (1974), the *IEEE Centennial Medal* (1984), the *Kyoto Prize in High Technology* from the Inamori foundation, Japan (1985), the *Steele Prize* of the American Mathematical Society (1987), and the *Bellman Prize* (1997). He is a member of the National Academy of Sciences (USA), the National Academy of Engineering (USA), and the American Academy of Arts and Sciences (USA). He is a foreign member of the Hungarian, French, and Russian Academies of Science, and has received many honorary doctorates



Kálmán-féle rendszer definíció

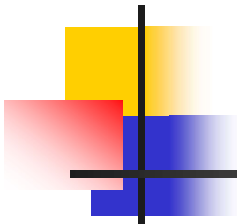
- „állapottér” definíciók



Bevezető fogalmak

1. Idő

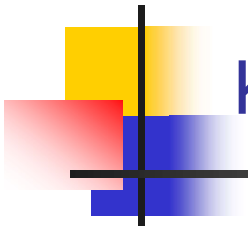
- T - időhalmaz
 - folytonos – diszkrét
 - véges – végtelen (egyik vagy mindkét irányban)



Kálmán-féle rendszer definíció

2. Adott a

- a lehetséges bemeneti értékek halmaza U ,
 $\underline{u} \in U$
- a lehetséges kimeneti értékek halmaza Y ,
 $\underline{y} \in Y$
- a lehetséges belső állapot értékek halmaza X ,
 $\underline{x} \in X$



Kálmán-féle rendszer definíció

3. Adott

- a lehetséges **bemenet-időfüggvények**
halmaza Ω

$$\Omega = \{ \omega \mid \omega : T \rightarrow U \} \qquad u(t) \sim \omega$$

- a lehetséges **kimenet-időfüggvények**
halmaza Γ

$$\Gamma = \{ \gamma \mid \gamma : T \rightarrow Y \} \qquad y(t) \sim \gamma$$

Kálmán-féle rendszer definíció

- Axiómák

1. A bemenetek szétvághatósága

- bemenetszegmens fogalma

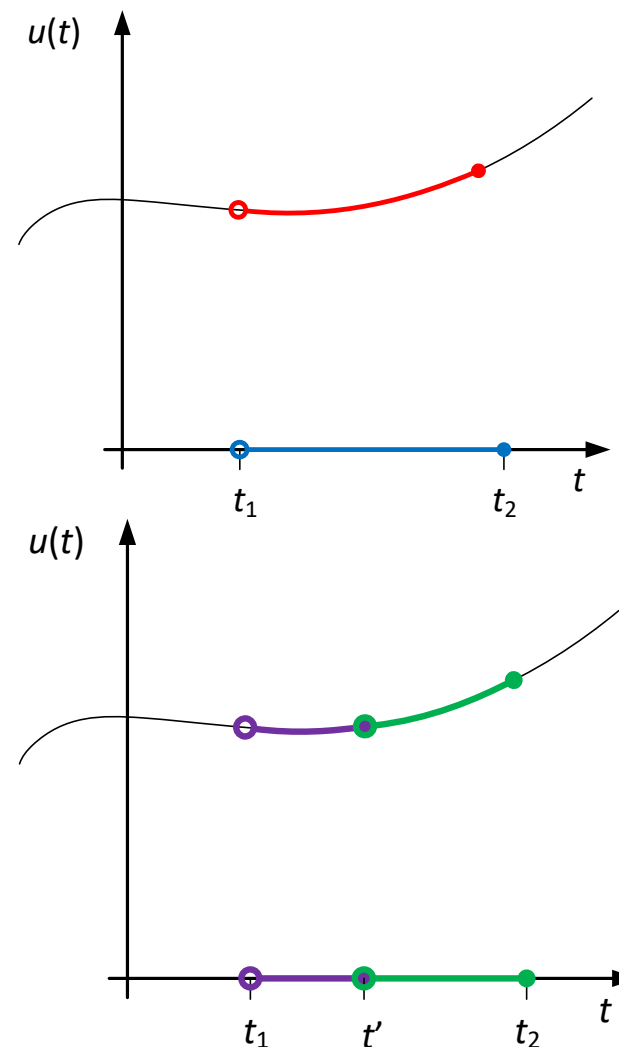
$(t_1, t_2] \subset T$ időintervallum

$u(t) / t \in (t_1, t_2]$ $u(t)_{(t_1, t_2]}$

- szétvághatóság

$t_1 < t' < t_2$ $u_1(t) = u(t) / t \in (t_1, t']$

$u_2(t) = u(t) / t \in (t', t_2]$



2. Az állapot-átmeneti függvény létezése

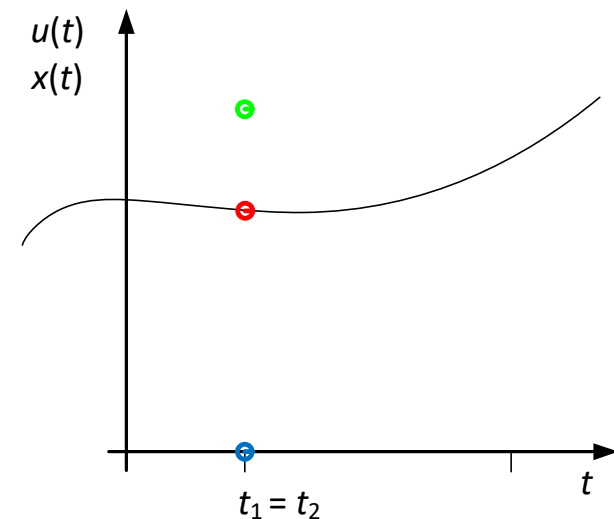
$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$$

$$x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t) / t \in (t_1, t_2])$$

- tulajdonságok

1. $t_2 \geq t_1$ -re igaz;

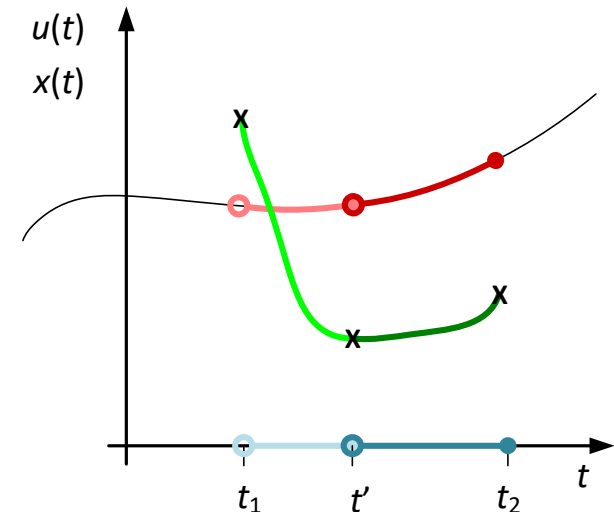
2. $t_2 = t_1$ esetén $x(t_2) = x(t_1)$;
konzisztencia



Kálmán-féle rendszer definíció

3. ha $t_1 < t' < t_2$, akkor

$$\begin{aligned} x(t_2) &= \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1, t_2]}) = \\ &= \varphi(t_2, t', x(t'), u(t)_{(t', t_2]}) ; \end{aligned}$$

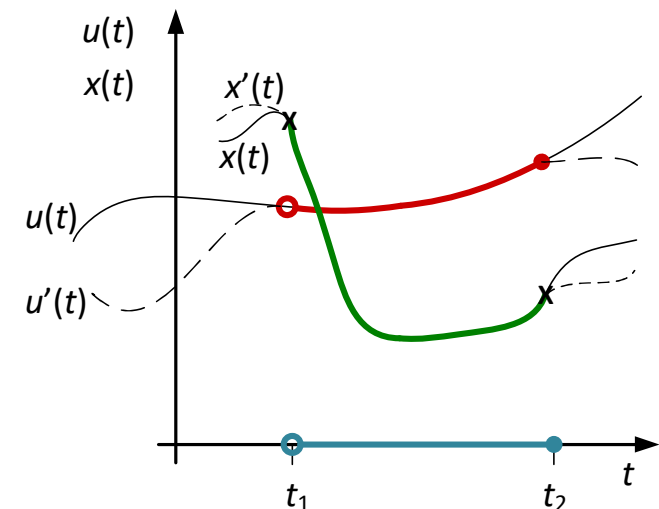


4. Egyértelműség:

ha $x(t_1) = x'(t_1)$ és

$$u(t) = u'(t) / t \in (t_1, t_2]$$

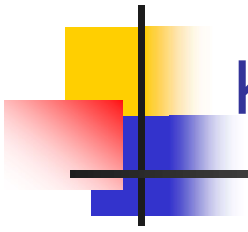
akkor $x(t_2) = x'(t_2)$



3. A kiolvasó- (kimenet) függvény létezése

$$\eta : T \times X \times U \rightarrow Y$$

$$y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1), u(t_1))$$



Kálmán-féle rendszer definíció

- **Rendszerdefiníció:**

$$\Sigma = (T, X, U, Y, \Omega, \Gamma, \varphi, \eta)$$

ahol

T – az időhalmaz

X – a lehetséges belső állapot értékek halmaza

U – a lehetséges bemeneti értékek halmaza

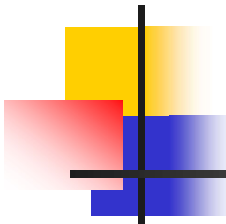
Y – a lehetséges kimeneti értékek halmaza

Ω – a lehetséges bemenet időfüggvények halmaza

Γ – a lehetséges kimenet időfüggvények halmaza

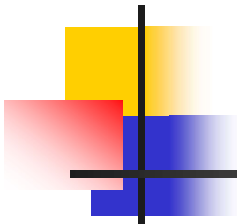
φ – az állapot-átmeneti függvény

η – a kiolvasó függvény



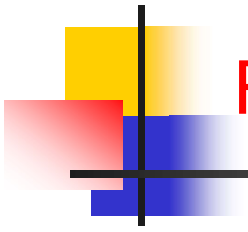
Kálmán-féle rendszer definíció

- néhány elnevezés:
 - (t, x_t) - esemény
 - $T \times X$ – eseménytér vagy fázistér
 - φ állapotátviteli függvény $\rightarrow$ trajektória, pálya, folyam, megoldás, megoldási görbe
 - az $\omega / u(t)$ bemenet vagy beavatkozás a rendszer $x(t_1)$ állapotát átviszi vagy átranzformálja a $\varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1, t_2]})$ állapotba, azaz a rendszer működik



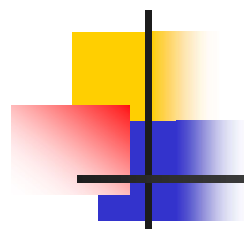
Kálmán-féle rendszer definíció

- ha Ω -nak egyetlen eleme van, akkor Σ -t szabadnak nevezzük
- reverzibilis rendszer, ha az állapot-átmeneti függvény tetszőleges t_1, t_2 értékekre teljesül



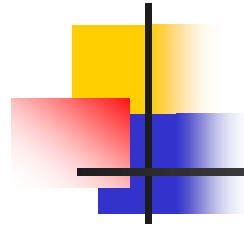
Rendszerek osztályozása

- A T időhalmaz alapján:
folytonos idejű – diszkrét idejű
- Az X, U, Y halmazok értékei alapján:
számszerűek – nemszámszerűek
- Az X állapothalmaz alapján:
véges állapotú – végtelen állapotú



Rendszerek osztályozása

- Az X, U, Y, Ω, Γ halmazok alapján:
lineáris – nemlineáris
- A φ függvény alapján:
időinvariáns – idővariáns
- A $\varphi, u(t), y(t)$ függvények alapján:
determinisztikus – sztochasztikus



Rendszerek osztályozása

- A φ függvény értékeinek a helytől való függése alapján:

véges dimenziós – végtelen dimenziós
(koncentrált paraméterű – elosztott paraméterű)

Véges állapotú, diszkrét idejű, időinvariáns
rendszerek $\rightarrow$ automaták

- Az állapotter modell alakjai:

- az állapot-átmeneti függvény:

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$$

$$x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)) / t \in (t_1, t_2]$$

- a kiolvasó függvény:

$$\eta : T \times X \times U \rightarrow Y$$

$$y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1), u(t_1))$$

- Nemlineáris, **idővariáns**, folytonos idejű rendszer:

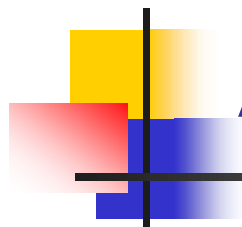
$$\dot{\underline{x}}(t) = f\left(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)\right)$$

$$\underline{y}(t) = g\left(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)\right)$$

- Nemlineáris, **időinvariáns**, folytonos idejű rendszer:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f\left(\underline{x}(t), \underline{u}(t)\right)$$

$$\underline{y}(t) = g\left(\underline{x}(t), \underline{u}(t)\right)$$



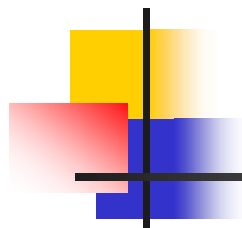
Állapottér modell

- **Lineáris**, **idővariáns**, folytonos idejű állapotér modell:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t)$$

az együttható mátrixok (A, B, C, D) időfüggők!



Állapottér modell

- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű állapotter modell:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)$$

ahol $\underline{x}$ – belső állapotok vektora

$\underline{u}$ – bemeneti vektor

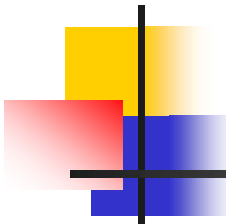
$\underline{y}$ – kimeneti vektor

A – állapotátmeneti mátrix

B – bemeneti mátrix

C – kimeneti mátrix

D – segédmátrix



Állapottér modell

- A modell elemeinek dimenziója

	SISO	MIMO
$\dim(\underline{x})$	n	n
$\dim(\underline{u})$	1	p
$\dim(\underline{y})$	1	r
$\dim(A)$	$n \times n$	$n \times n$
$\dim(B)$	$n \times 1$	$n \times p$
$\dim(C)$	$1 \times n$	$r \times n$
$\dim(D)$	1×1	$r \times p$

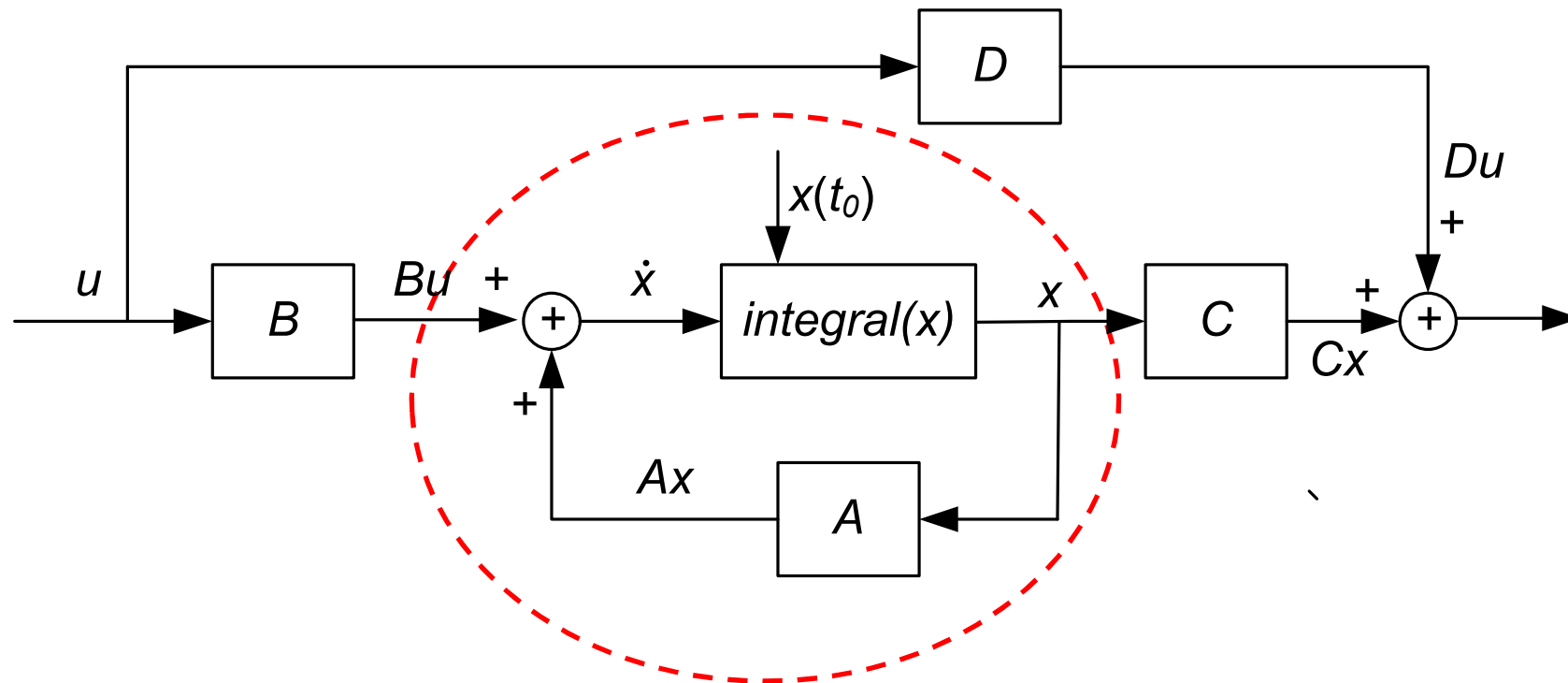
$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u \\ y &= \underline{c}^T \underline{x} + du\end{aligned}$$

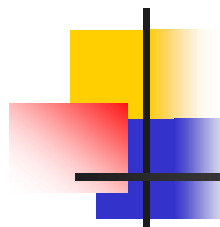
$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}\end{aligned}$$

Állapottér modell

- az állapottér modell blokkdiagramja





Állapottér modell

- Lineáris, időinvariáns diszkrét idejű állapotter modell:

$$\begin{aligned}\underline{x}((k+1)T_0) &= \underline{\Phi}\underline{x}(kT_0) + \underline{\Gamma}\underline{u}(kT_0) \\ \underline{y}(kT_0) &= \underline{C}\underline{x}(kT_0)\end{aligned}$$

ahol $\underline{x}$ – belső állapotok vektora

$\underline{u}$ – bemeneti vektor

$\underline{y}$ – kimeneti vektor

Φ – állapotátmeneti mátrix

Γ – bemeneti mátrix

C – kimeneti mátrix

T_0 – mintavételezési idő

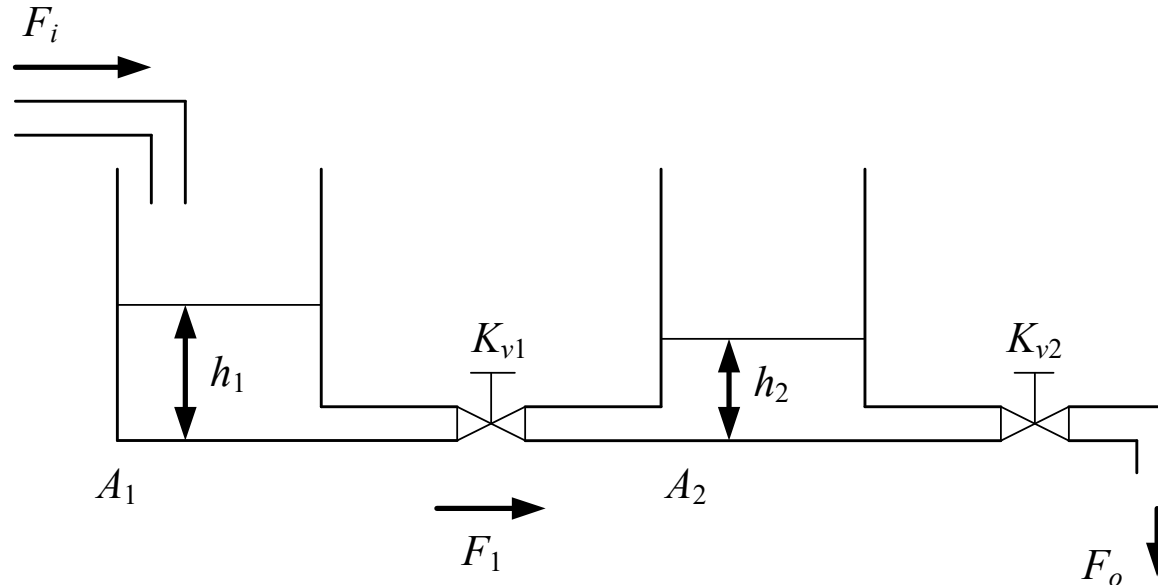
k – mintavételezés
sorszáma

$$\Phi = e^{AT_0}$$

$$\Gamma = A^{-1}(e^{AT_0} - I)B$$

Állapottér modell - példa

- Példa

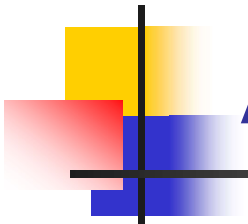


ahol A_1, A_2 – az 1. ill. 2. tartály alapterülete

h_1, h_2 – az 1. ill. 2. tartályokban a szintmagasság

K_{v1}, K_{v2} – a szelep ellenállási tényezők

F_i, F_1, F_o – belépő, átfolyó, kilépő vízárám

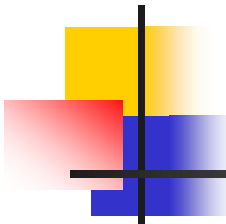


Állapottér modell - példa

- a leíró egyenletek:

tartálybeli		belépő		kilépő
mennyiség	=	áram	-	áram
megváltozása				

- 1. tartály $A_1 \dot{h}_1 = F_i - \frac{1}{K_{v1}} (h_1 - h_2)$
- 2. tartály $A_2 \dot{h}_2 = \frac{1}{K_{v1}} (h_1 - h_2) - \frac{1}{K_{v2}} h_2$



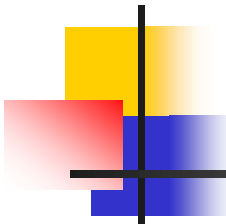
Állapottér modell - példa

- legyen a két állapotváltozó $h_1, h_2 \sim \underline{x}$ vektor elemei
a bemenő változó $F_i \sim u$ (egy bemenet)
a kimenő változó $F_o \sim y$ (egy kimenet)
- az egyenletek átalakítása után:

$$\dot{h}_1 = -\frac{1}{A_1 K_{v1}} (h_1 - h_2) + \frac{1}{A_1} F_i$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A_2 K_{v1}} h_1 - \left(\frac{1}{A_2 K_{v1}} + \frac{1}{A_2 K_{v2}} \right) h_2$$

$$F_o = \frac{1}{K_{v2}} h_2$$



Állapottér modell - példa

- ebből az állapottér modell:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 K_{v1}} & \frac{1}{A_1 K_{v2}} \\ \frac{1}{A_2 K_{v1}} & -\frac{K_{v1} + K_{v2}}{A_2 K_{v1} K_{v2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_i$$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$F_o = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$y = C \cdot x + \cancel{D \cdot u}$$

- Rendszerdefiníció:

$$\Sigma = (T, \cancel{X}, U, Y, \Omega, \Gamma, \cancel{\phi}, \cancel{\eta})$$

- hagyjuk el az állapotra vonatkozó elemeket
- vezessük be az A indexhalmazt és az F függvény-családot:

$$F = \{f_\alpha \mid f_\alpha : T \times \Omega \rightarrow Y, \alpha \in A\}$$

- F egyes tagjai: $y(t) = f_\alpha(t, u(t))$ ahol az $y(t)$ az $u(t)$ bemenetből a t időpillanatban kapott eredmény az α kísérlet esetében

- az függvényeket input/output (bemenet/kimenet) függvényeknek nevezzük, melyekre igaz:
 - (az idő iránya) létezik az $\iota: A \rightarrow T$ leképezés úgy, hogy $f_\alpha(t, u(t))$ definiált $\forall t \geq \iota(\alpha)$ -ra
 - (okozatiság) Legyen $t_1, t_2 \in T$ és $t_1 < t_2$.
Ha $u(t), u'(t) \in \Omega$ és

$$u(t)_{(t_1, t_2]} = u'(t)_{(t_1, t_2]}$$
 akkor $f_\alpha(t, u(t)) = f_\alpha(t, u'(t)) \quad \forall \alpha$ -ra úgy,
hogy $t_1 = \iota(\alpha)$

- Bemenet-kimenet modell definíciója

$$\Sigma_{I/O} = (T, U, Y, \Omega, \Gamma, F)$$

- a dinamikus bemenet/kimenet modellek a kísérleti adatok összefoglalásai
- az α absztrakt paraméterrel megcímkézett kísérletek egy alkalmazott bemenetből (ω vagy $u(t)$) és egy megfigyelt kimenetből ($y(t)$) állnak.

- A bemenet-kimenet modell alakjai:

- általános alak:

$$y(t) = F(u(\tau), t_0 \leq \tau \leq t) + y(t_0)$$

- dinamikus rendszerek esetén ez az általános alak átírható differenciálegyenletté:

$$f(y(t), y(t)^{(1)}, \dots, y(t)^{(n)}, u(t), u(t)^{(1)}, \dots, u(t)^{(m)}, t) = 0$$

- Lineáris, *idővariáns*, folytonos idejű bemenet-kimenet modell:

$$\begin{aligned} a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y(t) = \\ = b_m(t)u^{(m)}(t) + \dots + b_0(t)u(t) \end{aligned}$$

az együtthatók $(a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0)$ időfüggők!

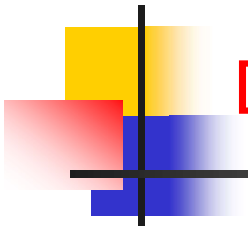
- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet-kimenet modell:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) \end{aligned}$$

ahol $u(t)$ – a bemenő jel

$y(t)$ – a kimenő jel

$a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ – paraméterek



Diszkrét I/O modell

- folytonos időtartományban a leíró I/O modell differenciálegyenlet típusú
- diszkrét időtartományban a leíró I/O modell differenciáegyenlet típusú
- differenciálhányados közelítése differenciáhányadossal, azaz a derivált értékének közelítése a mintavételezési időpontokban mért értékek alapján:

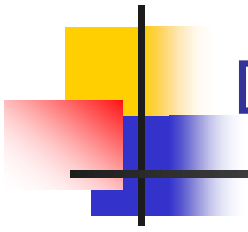
$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{T_0}$$

- a differenciálhányados definíciója

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

- előre felé vett differenciák vagy Euler módszer

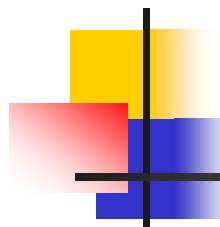
$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + T_0) - x(t)}{T_0} = \frac{x((k + 1)T_0) - x(kT_0)}{T_0}$$



Diszkrét I/O modell

- visszafelé vett differenciák

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_0)}{T_0} = \frac{x(kT_0) - x((k - 1)T_0)}{T_0}$$



Diszkrét I/O modell

- Diszkrét időtartomány – differenciaegyenlet modell
 - előre felé vett differenciák

$$c_n y((k+n)T_0) + c_{n-1} y((k+n-1)T_0) + \dots + c_1 y((k+1)T_0) + c_0 y(kT_0) = \\ = d_m u((k+m)T_0) + \dots + d_0 u(kT_0)$$

- visszafelé vett differenciák

$$c_0 y(kT_0) + c_1 y((k-1)T_0) + \dots + c_{n-1} y((k-n+1)T_0) + c_n y((k-n)T_0) = \\ = d_0 u((k-d)T_0) + d_1 u((k-d-1)T_0) + \dots + d_m u((k-d-m)T_0)$$