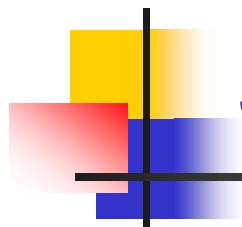
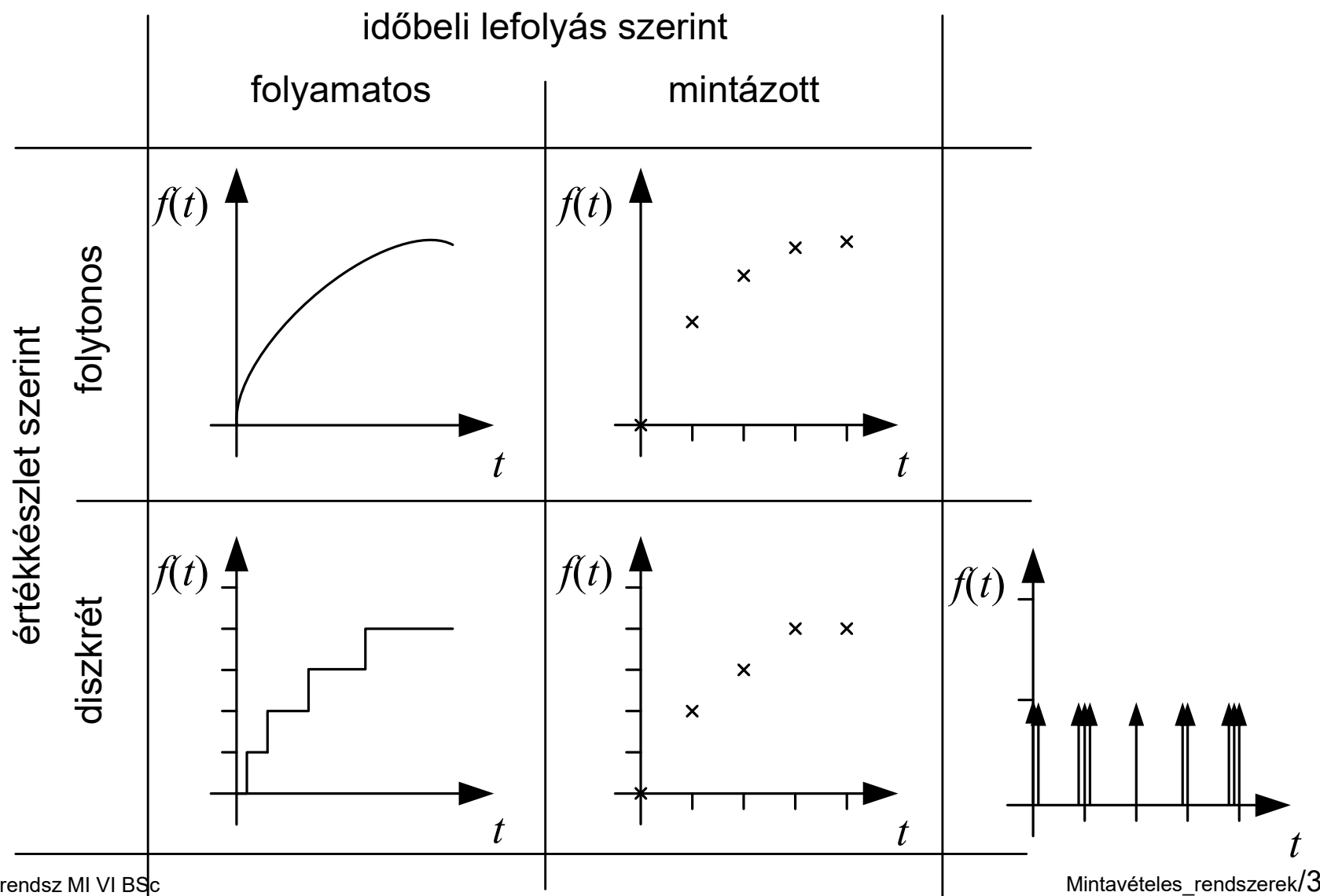


Diszkrét idejű jelek és rendszerek

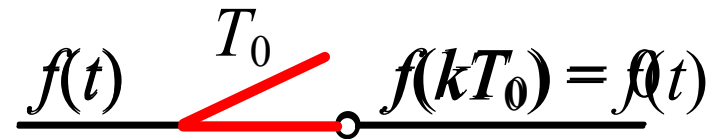
- értékkészlet szerint:
 - folytonos
 - diszkrét (szakaszos)
- időbeli lefolyás szerint:
 - folyamatos
 - diszkrét / mintázott
- meghatározottság szerint:
 - determinisztikus
 - sztochasztikus
- megjelenési forma szerint:
 - analóg
 - digitális



Jelek osztályozása



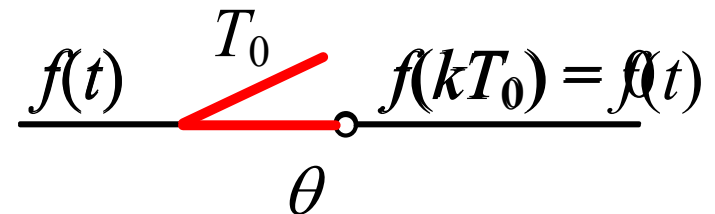
- Mintavételes szabályozás
 - számítógépes folyamatirányítás
 - egyéb rendszerek
 - kritérium: a folyamat időállandói és a mintavételezési idő összemérhetősége


$$f(t) \xrightarrow{T_0} f(kT_0) = f(t)$$

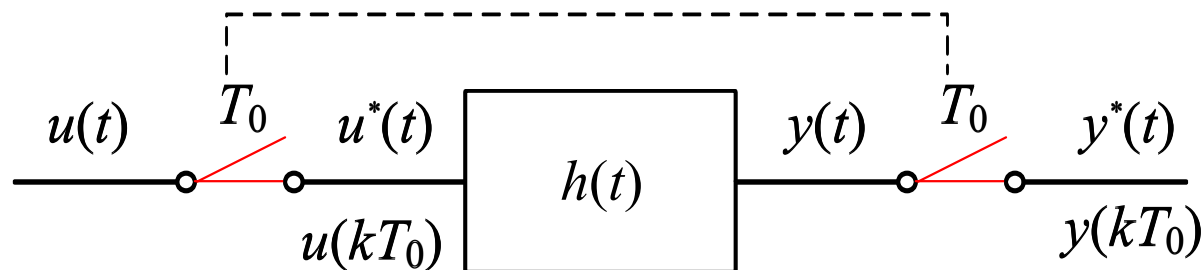
- Mintavételező eljárások osztályozása
 - mintavételezési időköz T_0 alapján
 - lineáris, rögzített lefolyású mintavételezés, $T_0 = \text{konst.}$
 - nemlineáris, jeltől függő mintavételezés, $T_0 \neq \text{konst.}$
 - véletlenszerű, statisztikai mintavételezés

Bevezetés

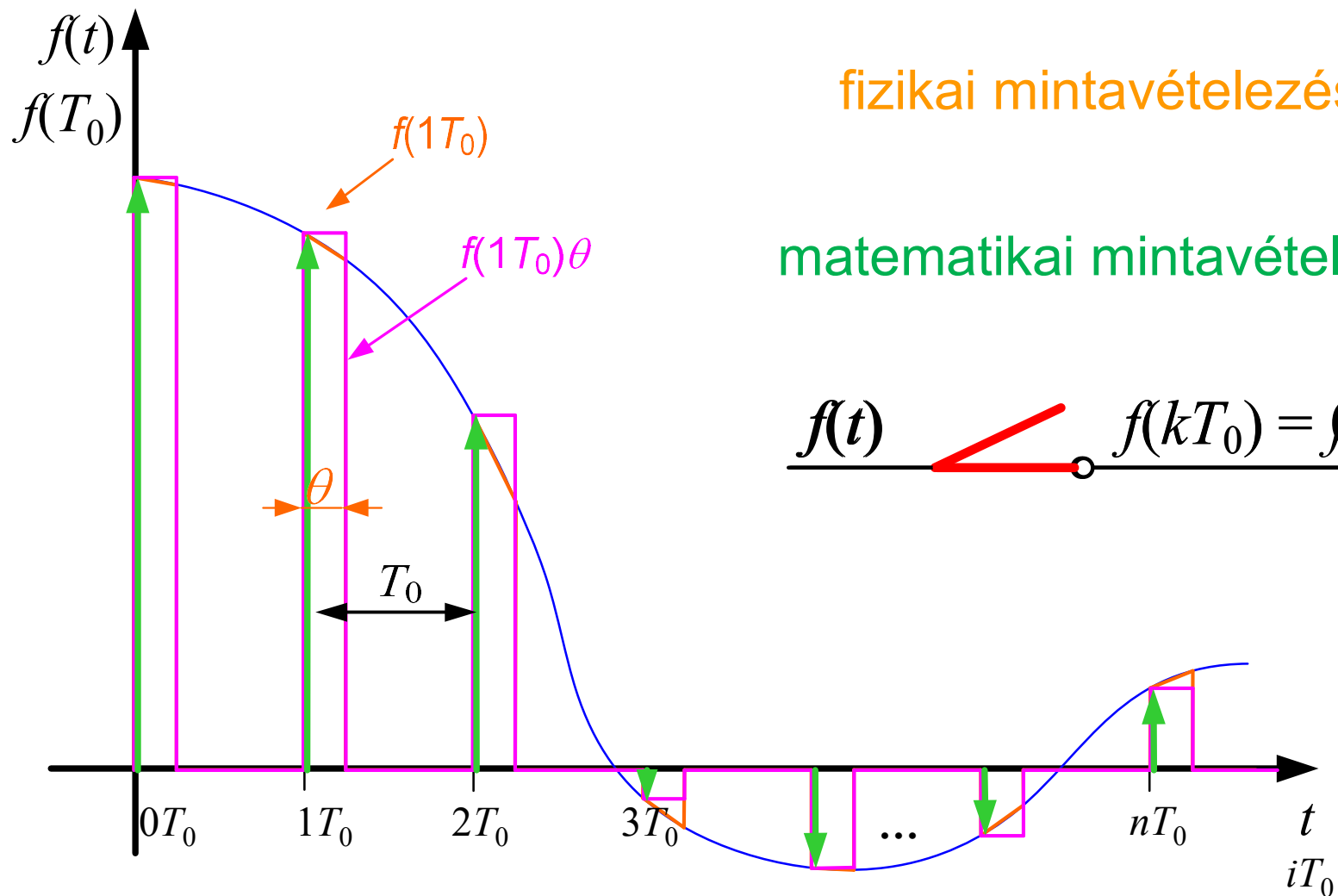
- időtartam, θ alapján
 - véges idejű, $\theta \neq 0$
 - pillanatszerű, $\theta \approx 0$



- pillanatszerű, lineáris mintavételezést tárgyaljuk, azzal a megkötéssel, hogy ha több mintavételező van egy körben, akkor azok **szinkronban** működnek (egyszerre történik a mintavételezés)



Mintavételezés értelmezése



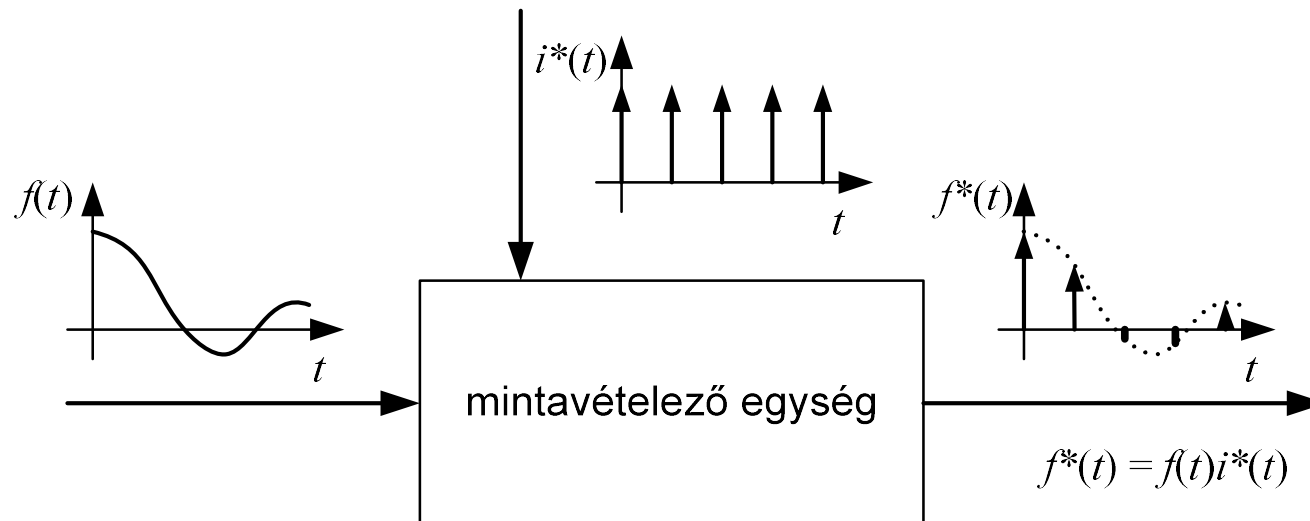
fizikai mintavételezés

matematikai mintavételezés

$$f(t) \rightarrow f(kT_0) = \mathcal{A}(t)$$

Mintavételezés értelmezése

- Összefoglalva:
 - mintavételező eljárás $\rightarrow$ impulzus sorozat amplitúdó modulációja



- bemeneten a mérendő változó folytonos időfüggvénye

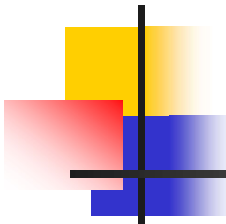
$$f(t) \quad f(t) = 0, \text{ ha } t < 0$$

- a moduláló jel az egységimpulzus sorozat

$$i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

- a kimenő jel a modulált impulzussorozat

$$f^*(t) = f(t) \cdot i^*(t)$$



Diszkrét Laplace-transzformáció

- a kimenő jel részletesen felírva

$$\begin{aligned} f^*(t) &= f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \\ &= f(t)\delta(t - 0T_0) + f(t)\delta(t - 1T_0) + \dots + f(t)\delta(t - nT_0) + \dots \end{aligned}$$

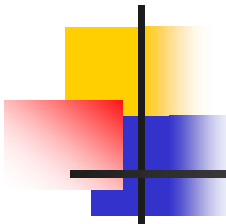
- miután δ függvény a $t = nT_0$ helyet kivéve mindenhol 0

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \delta(t - nT_0)$$

- Laplace-transzformálva

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \cdot e^{-nT_0 s}$$

diszkrét Laplace-transzformált



z-transzformáció

- vezessük be a következő változót

$$z = e^{T_0 s}$$

- így megkapjuk a mintavételezett $f^*(t)$ függvény z -transzformáltját

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) z^{-n}$$

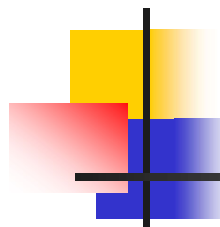
- a transzformálhatóság feltétele:

$$|f(nT_0)| \leq M e^{\alpha n T_0} \quad \text{ha } n \geq n_0 \quad M, \alpha, n_0 > 0$$

- ténylegesen

$$F^*(s) = F^*\left(\frac{1}{T_0} \ln z\right)$$

- egyszerű alak, de végtelen sor, az összegképlet felírása nem mindig könnyű
- léteznek más transzformációs képletek is:
 - általános zárt képlet (reziduum-tétel)
 - zárt alakú képlet egyszeres pólusokra



z-transzformáció

- transzformációs képlet egyszeres pólusokra

$$F(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F'_p(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{p_i T_0}}$$

- ahol

$$F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)}$$

a Laplace transzformált
racionális törtfüggvény alakban

p_i

egy pólus

P

pólusok száma

$$F_z(p_i) = F_z(s) \Big|_{s=p_i}$$

számláló polinomja az $s=p_i$ helyen

$$F'_p(p_i) = \frac{dF_p(s)}{ds} \Big|_{s=p_i}$$

nevező polinomjának deriváltja
az $s=p_i$ helyen

- Fontos! A z -transzformált csak a mintavételezési időpontokban áll kapcsolatban az eredeti folytonos függvénnyel!
- következmények:
 - a mintavételezési időpontokban azonos értéket felvevő függvényeknek azonos a z -transzformáltjuk
 - az inverz z -transzformáció csak a mintavételezési időpontokbeli értékeket adja vissza

- Inverz z-transzformáció

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace-transzformáció

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

inverz Laplace-transzformáció

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) z^{-n}$$

z-transzformáció

$$f(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz$$

inverz z-transzformáció

- invertálási lehetőségek
 - komplexfüggvénytani út
 - törtfüggvény-alakra hozás

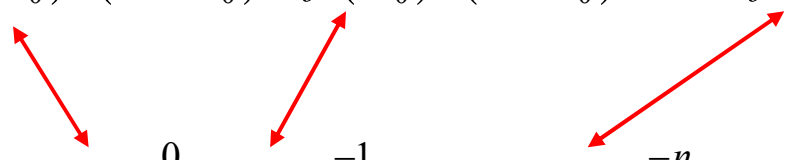
$$A_1 \frac{z}{z - \alpha}, \quad A_2 \frac{z}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad A_3 \frac{z(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$$

majd táblázat alapján a visszatranszformálás

- előny: zárt alakú képlet, tetszőleges mintavételi időponthoz tartozó érték közvetlenül meghatározható
- hátrány: a felbontás elvégezhetősége

- negatív kitevős hatványsorba fejtés:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)\delta(t - nT_0) = f(0T_0)\delta(t - 0T_0) + f(1T_0)\delta(t - 1T_0) + \dots + f(nT_0)\delta(t - nT_0) + \dots$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} + \dots$$


- előny: racionális törtfüggvény alakban rendelkezésre álló kifejezéseknél polinomosztással könnyen előállítható
- hátrány a keresett időpontig valamennyi értéket meg kell határozni

- z-transzformáció tételei

- összeadás, konstanssal való szorzás

$$Z(f_1(kT_0) \pm f_2(kT_0)) = F_1(z) \pm F_2(z) \quad Z(\alpha \cdot f(kT_0)) = \alpha \cdot F(z)$$

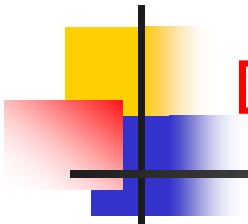
- időbeli eltolás $Z(f(kT_0 - nT_0)) = z^{-n} F(z)$

$$Z(f(kT_0 + mT_0)) = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT_0) z^{-k} \right]$$

- kezdeti érték $\lim_{k \rightarrow 0} f(kT_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z)$

- végérték $\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$ pólus ellenőrzés!

- csillapítás, konvolúció



Diszkretizálás

- folytonos időtartományban a leíró modell
I/O modell differenciálegyenlet alakban
- diszkrét időtartományban a leíró modell
I/O modell differenciáegyenlet alakban
- differenciálhányados közelítése differenciáhányadossal vagy a derivált értékének közelítése a mintavételezési időpontokban mért értékekkel:

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{T_0}$$

- definíció alapján

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

- előre felé vett differenciák vagy Euler módszer

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + T_0) - x(t)}{T_0} = \frac{x(kT_0 + T_0) - x(kT_0)}{T_0} = \frac{x((k + 1)T_0) - x(kT_0)}{T_0}$$

- ez azt jelenti, hogy

$$\left. \begin{aligned} \frac{zX(z) - X(z)}{T_0} &= \frac{z - 1}{T_0} X(z) \\ L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) &= sX(s) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &\rightarrow \frac{z - 1}{T_0} \\ z &\rightarrow 1 + T_0 s \end{aligned}$$

- visszafelé vett differenciák

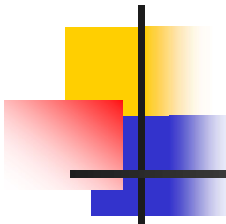
$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_0)}{T_0} = \frac{x(kT_0) - x(kT_0 - T_0)}{T_0} = \frac{x(kT_0) - x((k-1)T_0)}{T_0}$$

- ez azt jelenti, hogy

$$\left. \begin{aligned} \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T_0} &= \frac{1 - z^{-1}}{T_0} X(z) = \frac{z - 1}{zT_0} X(z) \\ L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) &= sX(s) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &\rightarrow \frac{z - 1}{zT_0} \\ z &\rightarrow \frac{1}{1 - T_0 s} \end{aligned}$$

- bilineáris közelítés (Tustin módszer)
 - a numerikus integrálásnál használt trapéz módszer alapján

$$s \rightarrow \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad z \rightarrow \frac{1+sT_0/2}{1-sT_0/2}$$



Diszkrét I/O modell

- differenciálegyenletek átírása differenciaegyenletté
 - folytonos modell

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

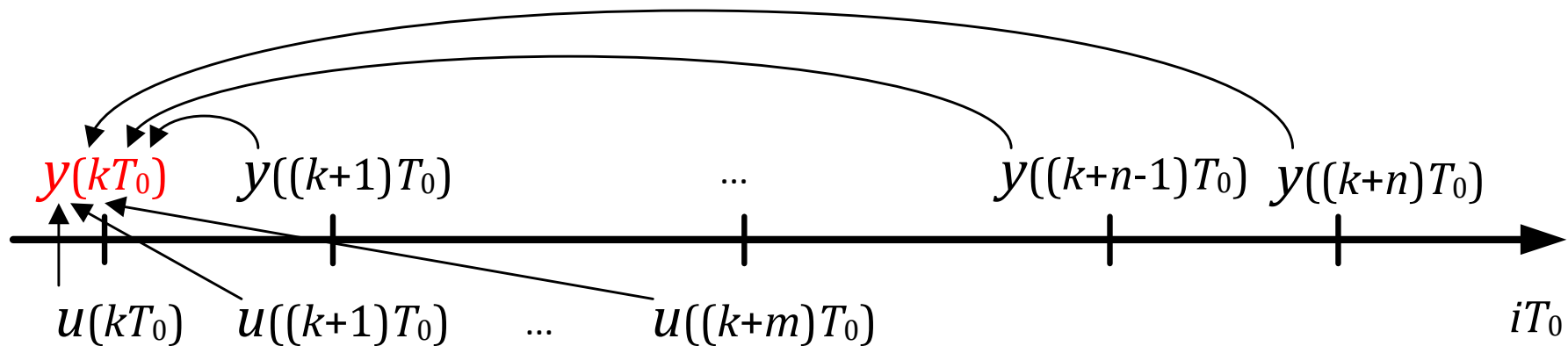
- előre felé vett differencia egyenlet

$$\begin{aligned} c_n y((k+n)T_0) + c_{n-1} y((k+n-1)T_0) + \dots + c_1 y((k+1)T_0) + c_0 y(kT_0) = \\ = d_m u((k+m)T_0) + \dots + d_0 u(kT_0) \end{aligned}$$

- off line alkalmazhatóság, „visszafelé”
következtetés

Diszkrét I/O modell

- jelen: $y(kT_0)$
- visszafelé vett következtetés: $y(kT_0)$ meghatározása az $y((k+1)T_0), \dots, y((k+n)T_0), u((k)T_0), \dots, y((k+m)T_0)$ jövőbeni értékeken alapul



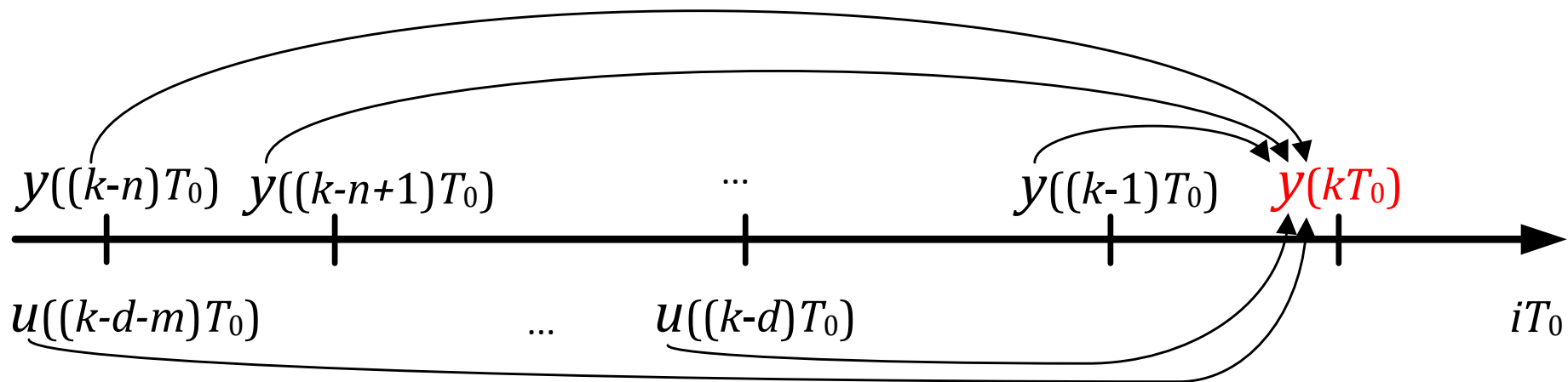
- visszafelé vett differencia egyenlet

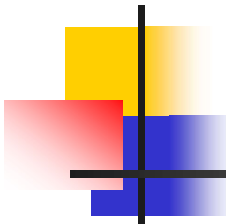
$$\begin{aligned} e_0 y(kT_0) + e_1 y((k-1)T_0) + \dots + e_{n-1} y((k-n+1)T_0) + e_n y((k-n)T_0) = \\ = f_0 u((k-d)T_0) + \dots + f_m u((k-d-m)T_0) \end{aligned}$$

- d a bemenet késleltetése a kimenethez képest
 $d = n - m,$
- on line alkalmazhatóság, előre következtetés

Diszkrét I/O modell

- jelen: $y(kT_0)$
- előre felé vett következtetés: $y(kT_0)$ meghatározása az $y((k-1)T_0), \dots, y((k-n)T_0), u((k-d)T_0), \dots, u((k-d-m)T_0)$ múltbeli (korábbi) értékeken alapul





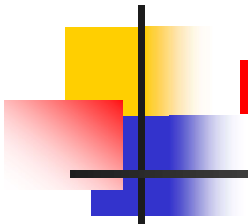
Diszkrét I/O modell

- mindkét modell
 - LTI, azaz lineáris, időinvariáns: együtthatók konstansok
 - kezdeti feltételek: $y(-1T_0), \dots, y(-nT_0)$ n db adat
 - oksági szabály itt is érvényes: $n \geq m$
 - legyen $k=3$ az aktuális mintavételezési időpont:

$$a_1 y(1T_0) + \underline{a_0 y(0T_0)} = \cancel{b_2 u(2T_0)} + b_1 u(1T_0) + b_0 u(0T_0) \quad \begin{array}{l} \text{előrefelé vett} \\ \text{differencia egy.} \end{array}$$

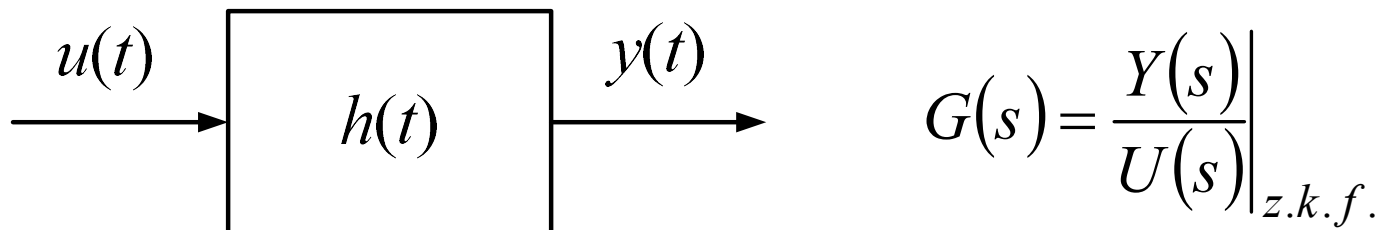
$$\underline{a_0 y(0T_0)} + a_1 y(-1T_0) = \cancel{b_0 u(1T_0)} + b_1 u(0T_0) + b_2 u(-1T_0) \quad \begin{array}{l} \text{visszafelé vett} \\ \text{differencia egy.} \end{array}$$

nem megvalósítható esetek!



Impulzusátviteli függvény

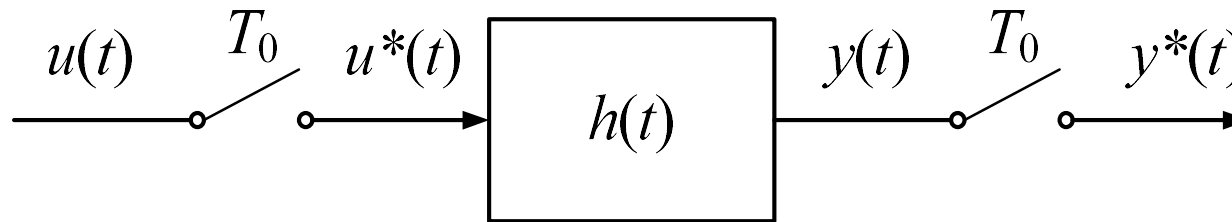
- átviteli függvény (folytonos időtartomány)



- a rendszer operátor tartománybeli modellje
- független a konkrét bemenettől
- segítségével adott bemenetre kapott válasz meghatározható

Impulzusátviteli függvény

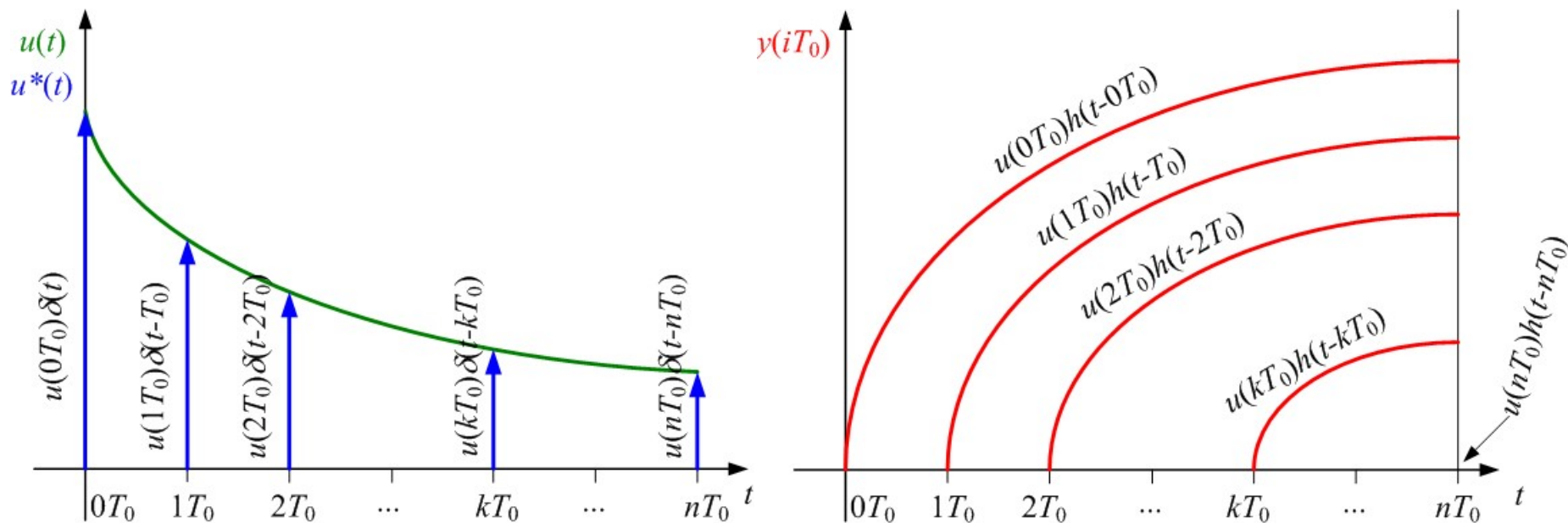
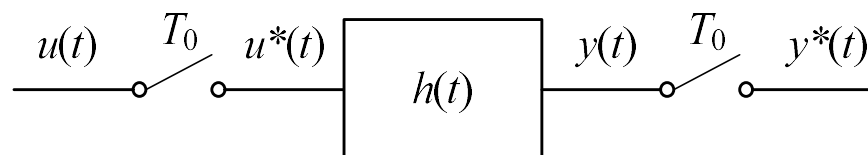
- diszkrét idő tartományban

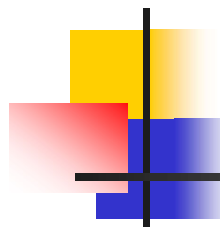


- $u(t)$ a folytonos bemenő jel
- $u^*(t)$ a mintavételezett bemenő jel
- $h(t)$ a tag súlyfüggvénye
- $y(t)$ a folytonos kimenő jel
- $y^*(t)$ a mintavételezett kimenő jel
- T_0 a mintavételezési idő, szinkron működés

Impulzusátviteli függvény

- bemenet – kimenet viszony az nT_0 -dik időpontban





Impulzusátviteli függvény

- súlyfüggvény: $u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$
- ez a $t = kT_0$ időpontban $u(kT_0)\delta(t-kT_0)$ bemenet lesz
- ennek hatására a tag kimenetén $u(kT_0)h(t-kT_0)$ folytonos jelösszetevő jelentkezik
- ennek értéke egy $t = nT_0$ ($n > k$) időpontban
 $u(kT_0)h(nT_0-kT_0)$
- valamennyi jelösszetevő összegezve

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(nT_0 - kT_0)u(kT_0)$$

- folytonos időtartományból ismert tétel:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

- összehasonlítva a most kapott alakkal:

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(nT_0 - kT_0) u(kT_0)$$

- a folytonos és a diszkrét időtartomány közötti hasonlóság és különbség

- a mintavételezett kimenő jel definíció szerint:

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0) \cdot \delta(t - nT_0) =$$

- $y(nT)$ -re behelyettesítve

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(nT_0 - kT_0) \cdot u(kT_0) \cdot \delta(t - nT_0) =$$

- legyen $n_k = n - k$ azaz $n = n_k + k$, így

$$= \sum_{n_k=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(n_k T_0) \cdot u(kT_0) \cdot \delta(t - n_k T_0 - kT_0)$$

- Ezt a kifejezést diszkrét Laplace-transzformálva

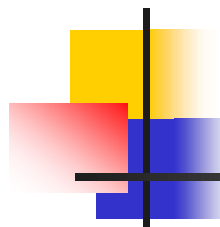
$$Y^*(s) = \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(n_k T_0) \cdot u(k T_0) \cdot e^{-(n_k + k) T_0 s} =$$

- miután $h(n_k T_0) = 0$, ha $n_k < 0$, így a két összegzés szétbontható:

$$= \sum_{n_k=0}^{\infty} h(n_k T_0) \cdot e^{-n_k T_0 s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(k T_0) \cdot e^{-k T_0 s}$$

- a két tag az átviteli függvény és a bemenő jel definíció szerinti diszkrét Laplace-transzformáltja:

$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot U^*(s)$$



Impulzusátviteli függvény

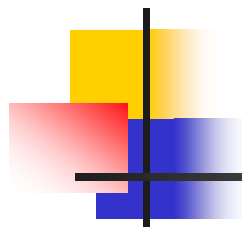
- az $e^{sT_0} = z$ behelyettesítéssel

$$Y(z) = \sum_{n_k=0}^{\infty} h(n_k T_0) \cdot z^{-n_k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(k T_0) \cdot z^{-k} = G(z) \cdot U(z)$$

- ebből az impulzusátviteli függvény

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad \text{zérus kezdeti feltételek mellett!}$$

- csak a mintavételezési időpontokban áll kapcsolatban az eredeti folytonos rendszerrel



Impulzusátviteli függvény

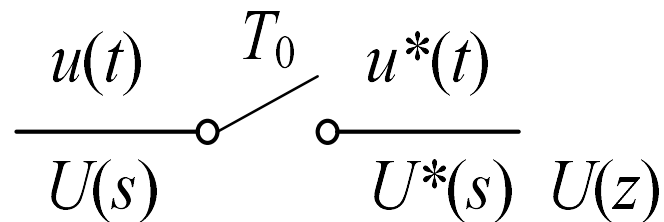
- racionális törtfüggvény alakban

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} =$$
$$= \frac{b_m z^{-d} + b_{m-1} z^{-d-1} + \dots + b_1 z^{-m-d+1} + b_0 z^{-m-d}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

ahol $d = n - m$

Nyílt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

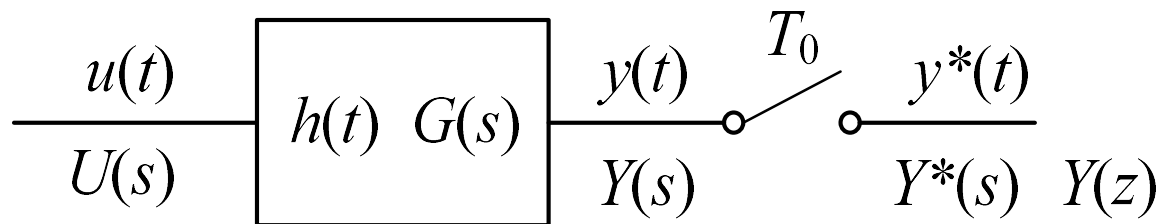
- mintavételező



$$U(s) = L\{u(t)\}$$

$$U(z) = Z\{u^*(t)\}$$

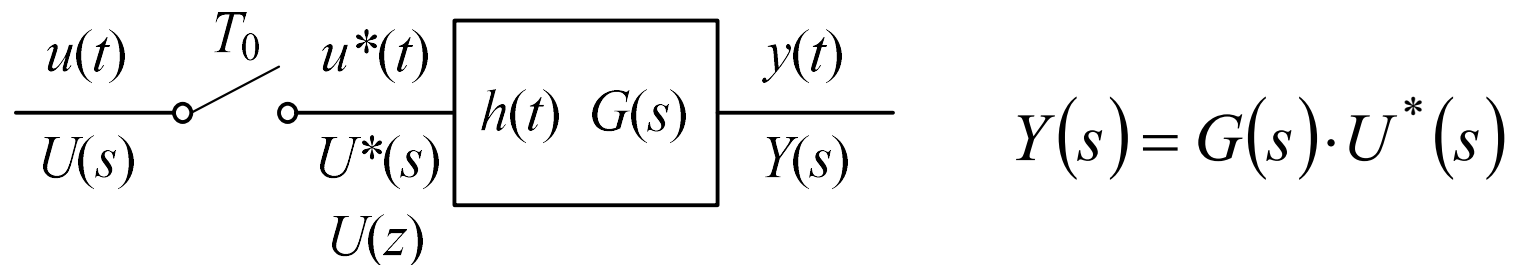
- kimenő jel mintavételezése:



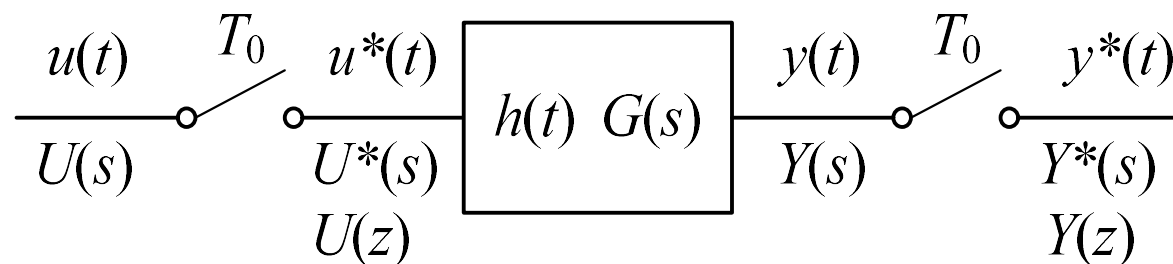
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad Y(z) = Z\{G(s) \cdot U(s)\}^{jel.} = GU(z)$$

Nyílt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

- bemenő jel mintavételezése



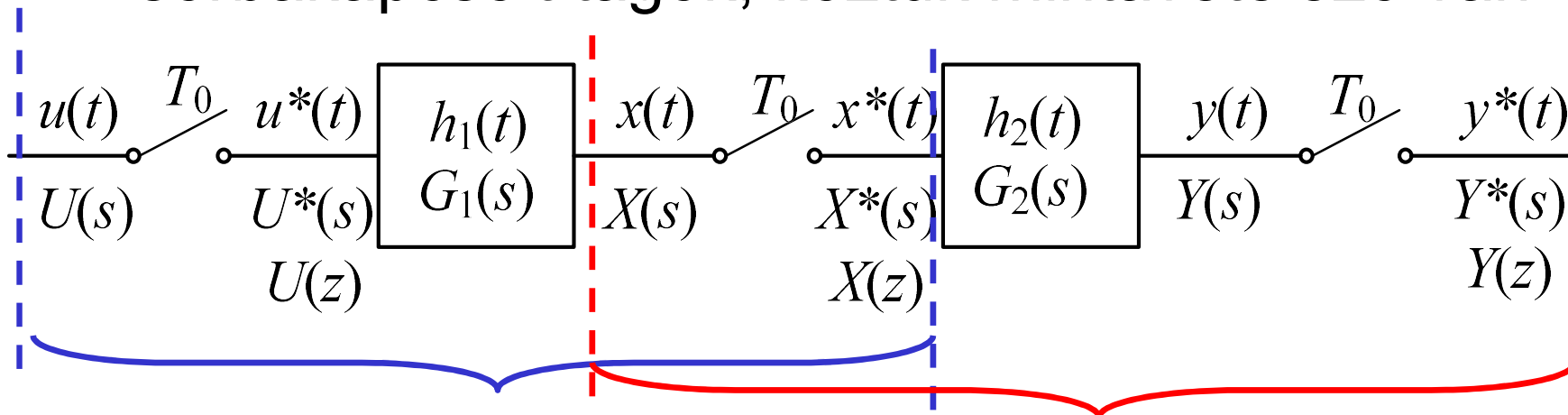
- bemenő, kimenő jel mintavételezése



$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot U^*(s) \quad Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

Nyílt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

- sorbakapcsolt tagok, köztük mintavételező van



$$X^*(s) = G_1^*(s) \cdot U^*(s)$$

$$Y^*(s) = G_2^*(s) \cdot X^*(s)$$

$$X(z) = G_1(z) \cdot U(z)$$

$$Y(z) = G_2(z) \cdot X(z)$$

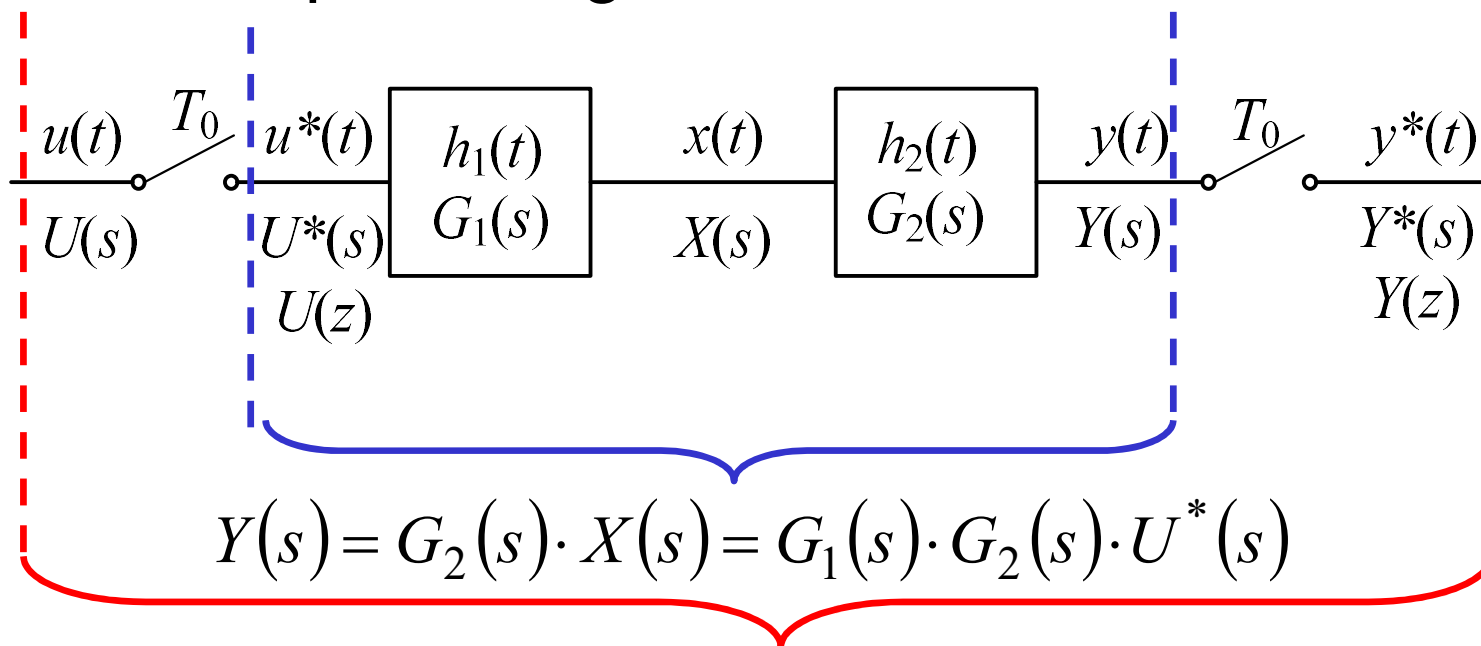
$$Y^*(s) = G_1^*(s) \cdot G_2^*(s) \cdot U^*(s)$$

$$Y(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot U(z)$$

$$G_e(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$$

Nyílt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

- sorba kapcsolt tagok, köztük mintavételező nincs



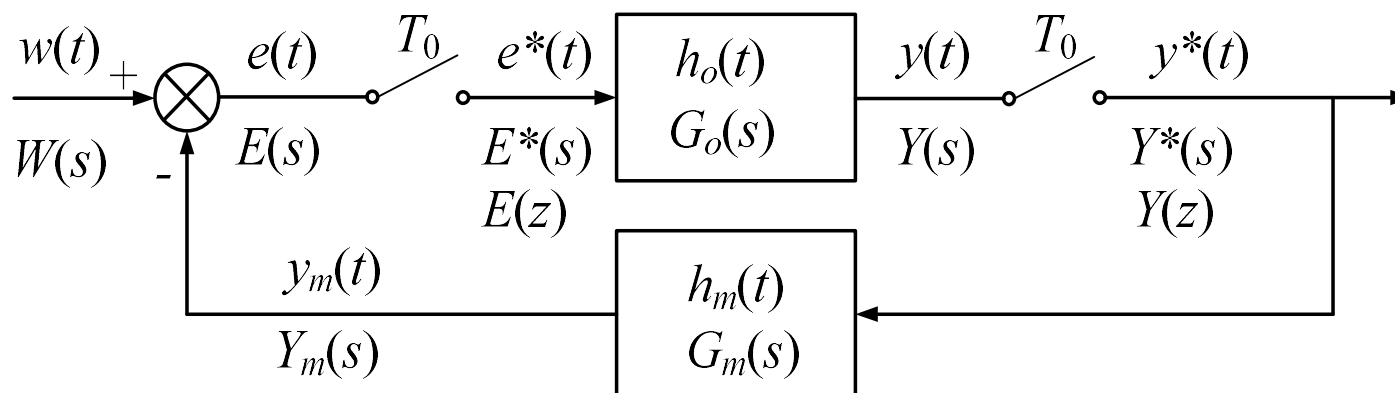
$$Y^*(s) = L^* \{G_1(s) \cdot G_2(s)\} \cdot U^*(s)$$

$$Y(z) = Z \{G_1(s) \cdot G_2(s)\} \cdot U(z) \stackrel{jel.}{=} G_1 G_2(z) U(z)$$

$$G_e(z) = G_1 G_2(z)$$

Zárt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

- visszacsatolt kör két taggal és két mintavételezővel



$$E(s) = W(s) - Y_m(s) = W(s) - G_m(s) \cdot Y^*(s)$$

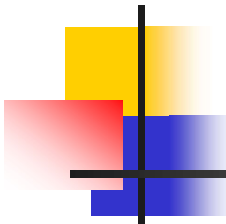
$$Y(s) = G_o(s) \cdot E^*(s)$$

$$Y^*(s) = G_o^*(s) \cdot E^*(s)$$

$$Y^*(s) = G_o^*(s) \cdot W^*(s) - G_o^*(s) \cdot G_m^*(s) \cdot Y^*(s)$$

$$E^*(s) = W^*(s) - G_m^*(s) \cdot Y^*(s)$$

$$\frac{Y^*(s)}{W^*(s)} = \frac{G_o^*(s)}{1 + G_o^*(s) \cdot G_m^*(s)} = G_e^*(s)$$



Zárt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

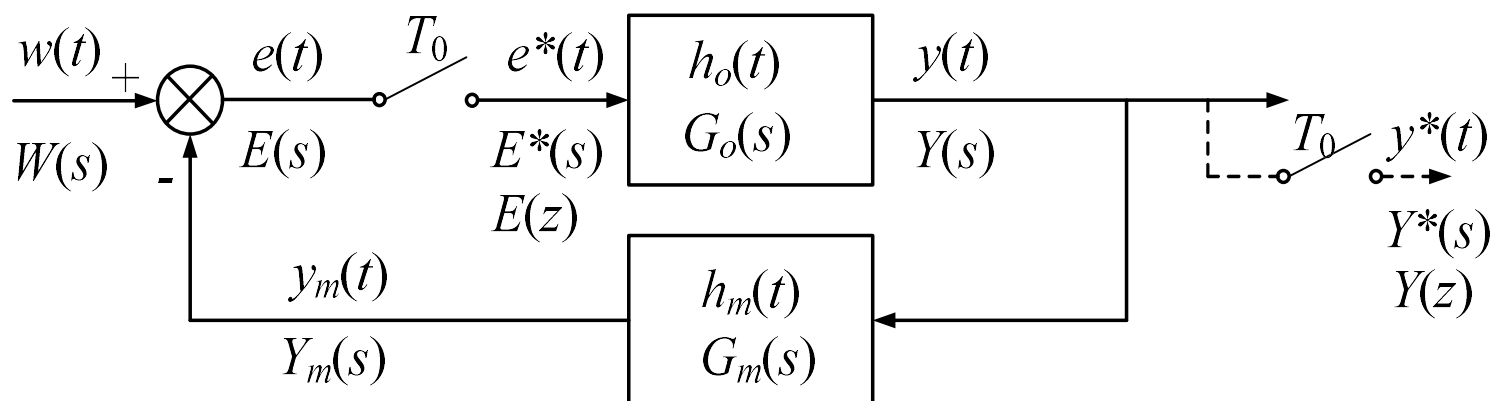
- z-transzformálva

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z) \cdot G_m(z)}$$

- azaz, ha minden tag előtt és után van mintavételező, akkor az eredő átviteli függvény a folytonos esethez hasonlóan származtatható

Zárt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

- visszacsatolt kör két taggal és egy mintavételezővel

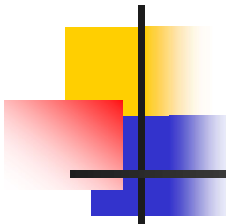


$$Y_m(s) = G_m(s) \cdot Y(s) = G_o(s) \cdot G_m(s) \cdot E^*(s)$$

$$E(s) = W(s) - Y_m(s) = W(s) - G_m(s) \cdot Y(s) = W(s) - G_o(s) \cdot G_m(s) \cdot E^*(s)$$

- diszkrét Laplace-transzformálva

$$E^*(s) = W^*(s) - L^* \{G_o(s) \cdot G_m(s)\} \cdot E^*(s) \quad E^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + L^* \{G_o(s) \cdot G_m(s)\}}$$



Zárt rendszerek eredő impulzusátviteli fv.-e

- behelyettesítve

$$Y^*(s) = G_o^*(s) \cdot E^*(s) = \frac{G_o^*(s) \cdot W^*(s)}{1 + L^* \{G_o(s) \cdot G_m(s)\}} = \frac{G_o^*(s)}{1 + G_o G_m^*(s)} \cdot W^*(s)$$

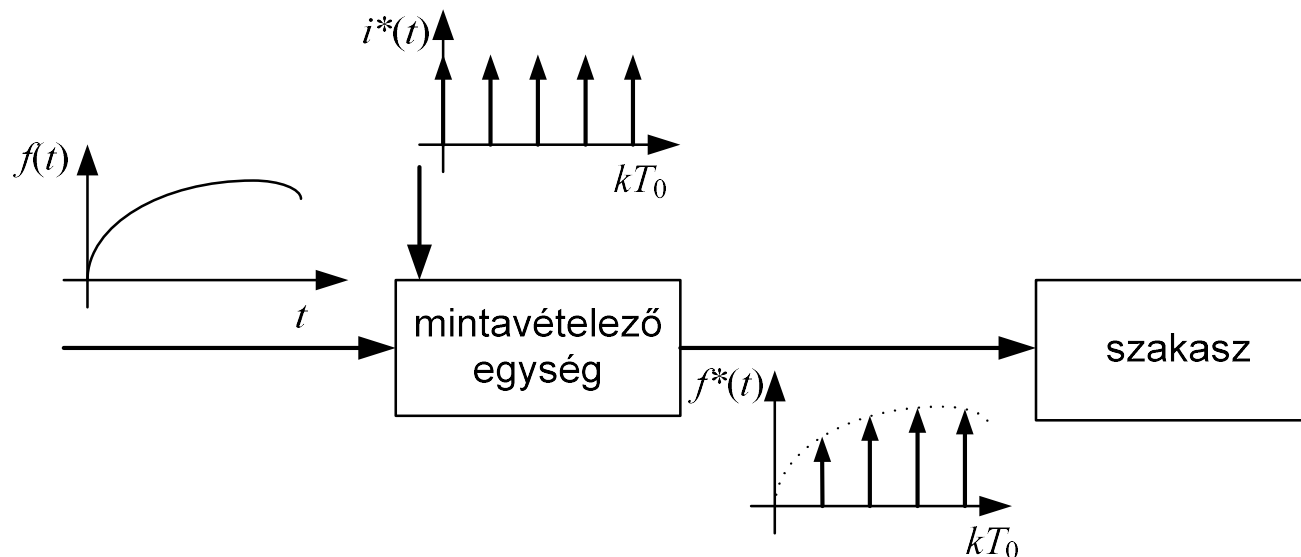
- z-transzformálva

$$Y(z) = \frac{G_o(z) \cdot W(z)}{1 + Z \{G_o(s) \cdot G_m(s)\}} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o G_m(z)} \cdot W(z)$$

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o G_m(z)}$$

Tartószervek

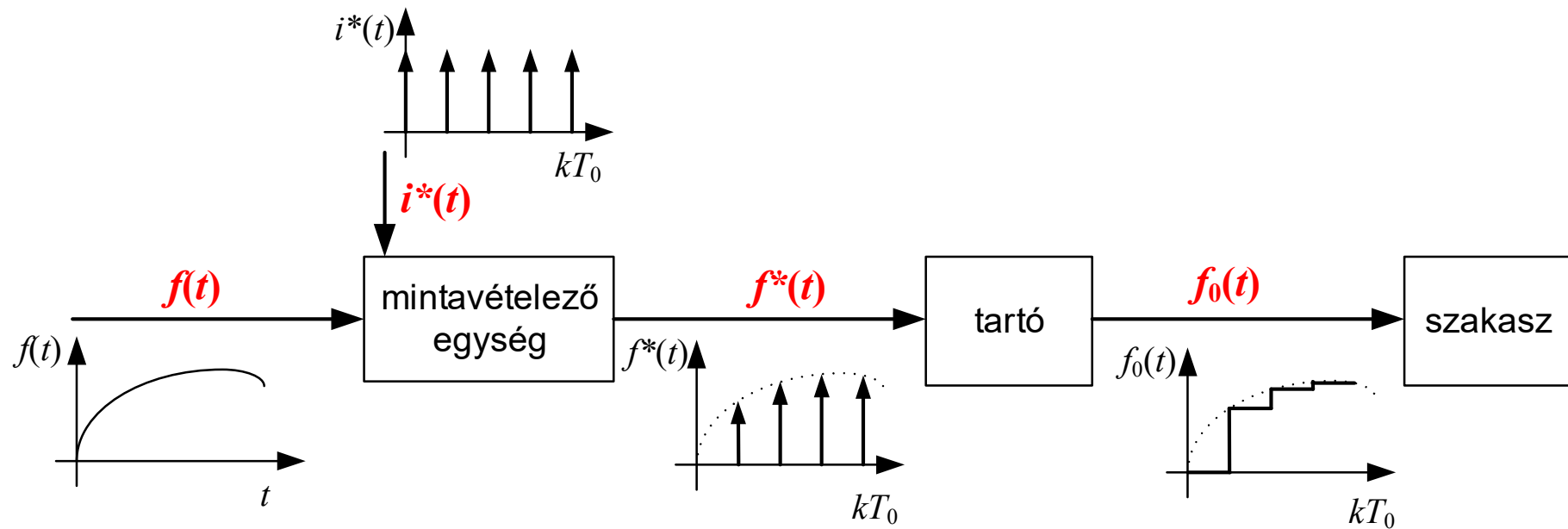
- eddigi vizsgálatoknál:



- azaz a szakasz bemenetére egy impulzussorozat került
- pl. a szabályzó a szabályozott tag felé impulzusokat küld ki

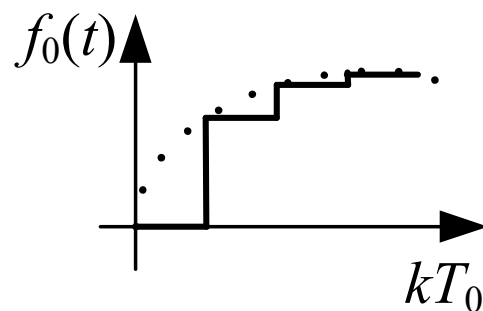
Tartószervek

- egy lehetséges megoldás: a következő mintavételezési időpontig maradjon ugyanaz a jel

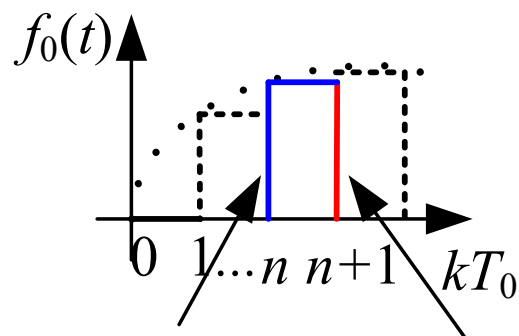
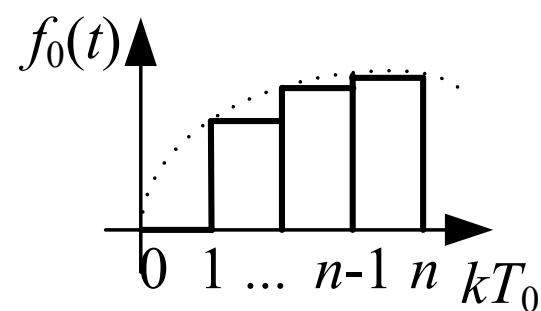


nulladrendű tartószerv

- leírása



$\Rightarrow$



$$f_0(nT_0)1(t-nT_0) - f_0(nT_0)1(t-(n+1)T_0)$$

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \cdot (1(t - nT_0) - 1(t - (n+1)T_0))$$

- Laplace-transzformálva

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \cdot \frac{e^{-nT_0s} - e^{-(n+1)T_0s}}{s} = \frac{1 - e^{-T_0s}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \cdot e^{-nT_0s}$$

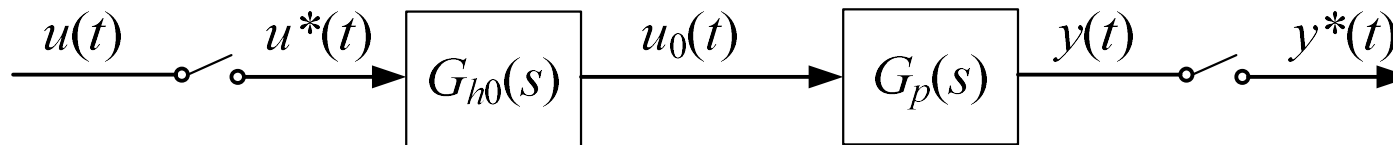
$$F_0(s) = \frac{1 - e^{-T_0s}}{s} F^*(s)$$

$= F^*(s)$, azaz $f^*(t)$
diszkrét Laplace-
transzformáltja

- ennek alapján a nulladrendű tartószerv átviteli függvénye

$$G_{h_0}(s) = \frac{F_0(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - e^{-T_0s}}{s}$$

- a teljes rendszert tekintve



- a diszkrét eredő átviteli függvény

$$G_e^*(s) = \mathcal{L}^* \left(G_{h_0}(s) G_p(s) \right)$$

- impulzus átviteli függvény

$$\begin{aligned} G_e(z) &= \mathcal{Z} \left(G_{h_0}(s) G_p(s) \right) = \mathcal{Z} \left(\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} G_p(s) \right) = \\ &= \mathcal{Z} \left(\frac{G_p(s)}{s} - e^{-T_0 s} \frac{G_p(s)}{s} \right) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left(\frac{G_p(s)}{s} \right) \end{aligned}$$