**Pannon Egyetem**
**Villamosmérnöki és Információs Tanszék**

# Digitális Áramkörök I.

(Villamosmérnök BSc)

5. hét – Szimmetrikus logikai függvények

Előadó: Dr. Vörösházi Zsolt
voroshazi.zsolt@mik.uni-pannon.hu

# Kapcsolódó jegyzet, segédanyag:

- http://www.virt.uni-pannon.hu
  → Oktatás → Tantárgyak → Digitális Áramkörök I. (Villamosmérnöki BSc).
  - Fóliák, óravázlatok .ppt (.pdf)
  - Frissítésük folyamatosan *„ //frissítve ”*

# Szimmetrikus logikai függvények

# Eddig: megismert minimalizálási eljárások

- Probléma: Szomszédosság
  - **Ha nincsenek szomszédos mintermek**, akkor a mintermek egyúttal a prímimplikánsok, és a DNF alak egyúttal a legegyszerűbb diszjunktív alak is.

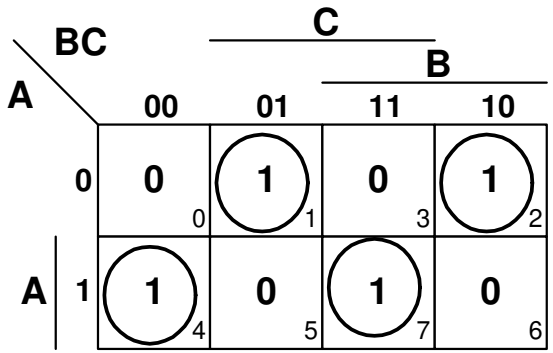
# Példa:

- Adott a következő DNF alak:

$$F^3(A,B,C) = \sum_{i=0}^{2^n-1}(1,2,4,7) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

$$= F(A,B,C) = \underline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC}$$

- A megismert módszerekkel (pl. Karnaugh) nincs lehetőség az egyszerűsítésre!




| m | A | B | C | F |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | **1** |
| 2 | 0 | 1 | 0 | **1** |
| 3 | 0 | 1 | 1 | **0** |
| 4 | 1 | 0 | 0 | **1** |
| 5 | 1 | 0 | 1 | **0** |
| 6 | 1 | 1 | 0 | **0** |
| 7 | 1 | 1 | 1 | **1** |

- Ezzel szemben az *F függvény* azzal a speciális tulajdonsággal rendelkezik, hogy ***érzéketlen a változók páronkénti felcserélésére***!

**PL: A → B** $\Rightarrow F(A,B,C) = \underline{\overline{B}\,\overline{A}C + \overline{B}A\overline{C} + B\overline{A}\,\overline{C} + BAC}$

# Szimmetrikus függvények

- **DEF**: azokat a logikai függvényeket, amelyek a független (bemeneti) változóik tetszőleges páronkénti felcserélése esetén változatlanok (érzéketlenek) maradnak, **szimmetrikus logikai függvényeknek** nevezzük.
  - Előző példában $F^3(A,B,C) = \sum_{i=0}^{2^n-1}(1,2,4,7)$ szimmetrikus függvény.
  - F = ‘1’ pontosan akkor, ha A,B,C közül vagy csak az egyiknek, vagy mindháromnak az értéke ‘1’ (lásd. előző igazság tábla)

# Szimmetria szám

- **DEF**: Minden szimmetrikus függvényhez megadható legalább egy olyan pozitív egész szám, amelyet **szimmetria számnak** neveznek.
- Ez azt jelenti, hogy az F=‘1’ függvényérték hány változó ‘1’ logikai értéke esetén áll elő.
- **Jele:** $S^{n}_{a_1,\ldots,a_k}(x_1,\ldots,x_n)$
- Előző példában: szimmetriaszám 1 és 3

$$= F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

$$S^{3}_{1,3}(A,B,C)$$

# Szimmetria szám (folyt)

- A szimmetriaszámok létezése *szükséges* és *elégséges feltétele* annak, hogy egy függvény szimmetrikus legyen.
- Nyilvánvaló, hogy a szimmetria számok között a legnagyobb értéket ($a_k$) a függvény változóinak száma (n) jelentheti.
- A legkisebb szimmetriaszám a 0 lehet, amely azt jelenti, hogy a függvény értéke akkor F=‘1’, ha egyetlen változójának az értéke sem ‘1’.

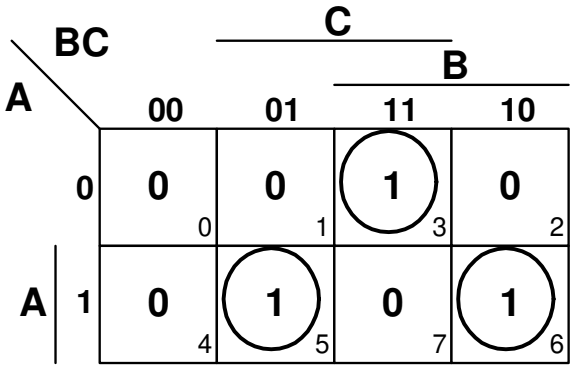
# Kanonikus szimmetrikus függvények

- DEF: Azokat a szimmetrikus függvényeket, amelyeknek csak *egyetlen szimmetriaszámuk* van, **kanonikus szimmetrikus függvényeknek** nevezzük.
- Példa: ‘F’ kanonikusan szimmetrikus-e?

$$F^3(A,B,C) = \sum_{i=0}^{2^n-1}(3,5,6) = m_3 + m_5 + m_6 =$$

**Igen.**

$$= \overline{A}BC + AB\overline{C} + A\overline{B}C \Rightarrow S_2^3(A,B,C)$$



# Műveletek szimmetrikus függvényekkel

- Vizsgálatunk célja: Az eddig megismert minimalizálási módszerekkel nem egyszerűsíthető szimmetrikus függvények gazdaságos megvalósítása, valamilyen lehetséges módszerrel (adatbázis).
- → Műveletek szimmetrikus függvényekkel
  - Logikai összeadás
  - Logikai szorzás
  - Szimmetrikus függvény negáltja
  - Szimmetrikus függvény változóinak negáltja (függetlenváltozó transzformáció)

# Szimmetrikus függvények műveletei (folyt.)

- A bemutatandó *(1.-4.) műveleti tulajdonság*, valamint szimmetria számok értelmezése alapján adott szimmetrikus függvényekből *egyszerűen előállíthatunk* más szimmetrikus függvényeket.
- Így, ha az *alap építőelem-készlet, mint egy adatbázis* rendelkezésre áll, ezekből felépítve sok más szimmetrikus függvény egyszerűen megvalósítható, anélkül hogy annak minimalizálása gondot okozna.

# 1.) Logikai összeadás

- Két ugyanazokon a független (bemeneti) változókon értelmezett szimmetrikus logikai függvény *logikai összege* (VAGY kapcsolata) olyan szimmetrikus logikai függvény, amelynek a szimmetria számai az eredeti két függvény ***szimmetria számainak az egyesítéséből*** (unió) adódnak.
- Pl: $$S^4_{2,3}(A,B,C,D)+S^4_{0,2}(A,B,C,D)=S^4_{0,2,3}(A,B,C,D)$$

# Szimmetrikus függvény algebrai alak felírása

- Pl: $S^4_{2,3}$ szimmetrikus logikai függvény algebrai alakját úgy célszerű felírni, hogy rendre képezzük az összes lehetséges olyan mintermet, amelyben *két változó* ponált értékével fordul elő, majd az összes lehetséges olyan mintermet írjuk fel, amelyben *három változó* szerepel ponált értékével:

$$S^4_{2,3}(A,B,C,D) =$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} +$$

$$+\overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}D + ABC\overline{D}$$

# Tipp: a felíráshoz

- Ha '*n*' változónk van és '*k*' a felírni kívánt szimmetria szám, akkor a kombinatorikában megismert kombinációt lehet alkalmazni, ahhoz hogy egyetlen alakot se hagyjunk el (azaz mennyi minterm képezhető '*k*' ponált esetén):

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Pl. $S_{2,3}^4$

$$C_{k=2}^{n=4} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

**6 lehetséges minterm képezhető, amelyben 2 ponált változó szerepel**

$$C_{k=3}^{n=4} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

**4 lehetséges minterm képezhető, amelyben 3 ponált változó szerepel**

# Szimmetrikus függvény algebrai alak felírása

- Pl: $S^4_{0,2}$ szimmetrikus logikai függvény algebrai alakját úgy célszerű felírni, hogy rendre képezzük az összes lehetséges olyan mintermet, amelyben *egyetlen változó* sincs ponált értékével, majd az összes lehetséges olyan mintermet írjuk fel, amelyben *két változó* szerepel ponált értékével:

$$S^4_{0,2}(A,B,C,D) =$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} +$$

$$+\overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D}$$

# Eredmény felírása:

$$S^4_{2,3}(A,B,C,D)+S^4_{0,2}(A,B,C,D)=S^4_{0,2,3}(A,B,C,D)=$$

$$\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D}+$$

$$+\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}$$

$$\cancel{+\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D}}+$$

$$+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

# 2.) Logikai szorzás

- Két ugyanazokon a független (bemeneti) változókon értelmezett szimmetrikus logikai függvény *logikai szorzata* (ÉS kapcsolata) olyan szimmetrikus logikai függvény, amelynek a szimmetria számai az eredeti két függvény ***szimmetria számainak a közös/azonos értékeiből*** (metszet) adódnak.
- Pl: $$S^4_{1,2,3}(A,B,C,D)\cdot S^4_{1,3,4}(A,B,C,D)=S^4_{1,3}(A,B,C,D)$$

# 2.) Logikai szorzás (folyt.)

- A szorzatfüggvény értéke akkor ‘1’, ha mindkét un. *tényezőfüggvény* értéke is ‘1’.
- Ha a tényezőfüggvényeknek *nincsenek azonos szimmetria számai*, akkor nem létezik olyan változókombináció, amely mellett a tényezőfüggvény ‘1’ lenne, ezáltal a **szorzatfüggvény értéke ‘0’.**
- Pl:

$$S_{1,3}^{4}(A,B,C,D)\cdot S_{2,4}^{4}(A,B,C,D)=0$$

# 3.) Szimmetrikus függvény negáltja

- **DEF:** Egy *n* változós **szimmetrikus logikai függvény negáltja** szintén szimmetrikus.
- A tagadott függvény szimmetria számai (*k*) az összes olyan *n*-nél (változók számánál) nem nagyobb természetes számok ($k \le n$ ,ahol $n,k \in N$), amelyek a kiindulási függvény szimmetria számai között nem szerepelnek.
- Tehát a tagadás művelete a szimmetria-szám halmazának *kiegészítő/komplementer* halmaza.
- Pl:

$$\overline{S^4_{0,1,3}(A,B,C,D)} = S^4_{2,4}(A,B,C,D)$$

# 4.) Szimmetrikus függvény változóinak negáltja

- **DEF:** Az *n*-változós szimmetrikus logikai függvényt a **változóinak a tagadottján** értelmezve egy olyan szimmetrikus függvényt kapunk, amelynek a szimmetria számai (*k*) rendre a kiindulási függvény szimmetria számaiból képezhetők *n-ből történő kivonás* útján **(„*n-k*” *szabály*).**
- Pl: $S^4_{2,3}(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}) = S^4_{2,1}(A,B,C,D) \Rightarrow S^4_{1,2}(A,B,C,D)$

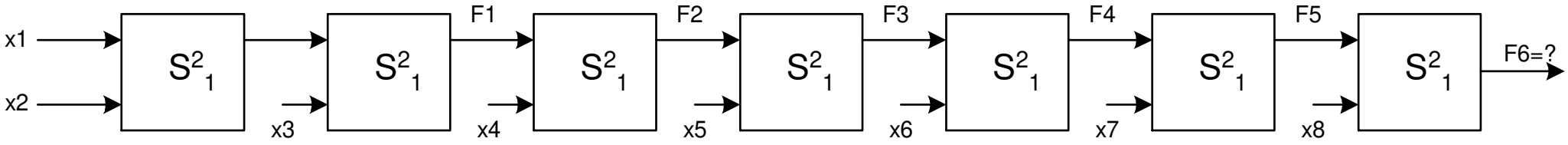
$k \le n$ , ahol $n,k \in N$

# Építőelem készlet: XOR

- Adatbázis: rendelkezésre áll az XOR kapu:

$$F^2(\mathrm{xor}) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} \Rightarrow S_1^2(x_1, x_2)$$

- Valósítsuk meg XOR kapuk sorba kapcsolásával a következő $F_6$ függvényt!




7-szintű hálózat

# Példa (folyt).

$$F_1 = S_1^2\left[S_1^2(x_1, x_2), x_3\right] = S_{1,3}^3(x_1, x_2, x_3)$$

$$F_2 = S_1^2\left[S_{1,3}^3(x_1, x_2, x_3), x_4\right] = S_{1,3}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$F_3 = S_1^2\left[S_{1,3}^4(x_1, x_2, x_3, x_4), x_5\right] = S_{1,3,5}^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

...

$$F_6 = S_{1,3,5,7}^8(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

**Azonban**, kevesebb kapuszinten lehet megvalósítani pl. az $S_{1,3,5,7}^8$ függvényt , ha rendelkezésre áll olyan építőelem is, amely az $S_{1,3}^3$ ill. az $S_{1,3}^4$ et is megvalósítja.



(Példa: Lapokon)

# Szimmetrikus függvények egyszerűsítési szabályai

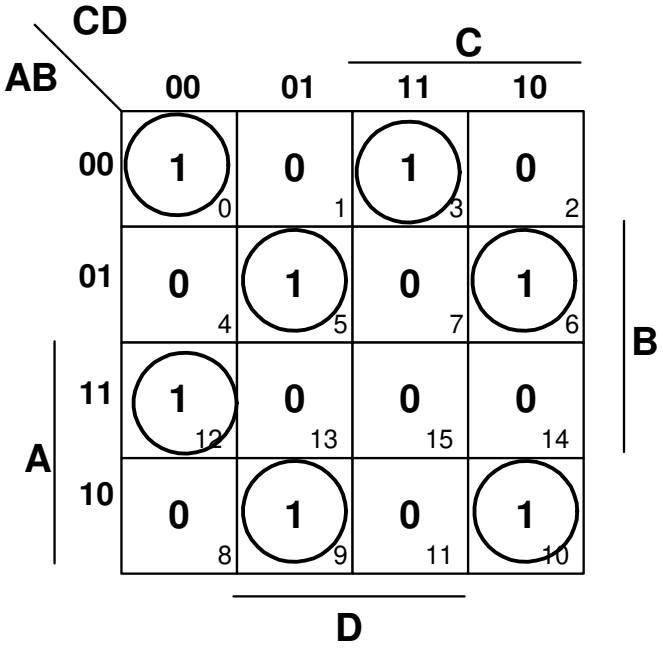
- Korábbi példákon olyan szimmetrikus függvények voltak, amelyek kanonikus normálalakja egyben a legegyszerűbb DNF alak is. (Pl: XOR)
- Azonban a szimmetria számoktól függően előfordulhat, hogy a szimmetrikus függvény *kis mértékben egyszerűsíthető*,
  - mivel a szimmetria szám azt is kifejezi egyben, hogy a függvény tartalmaz-e szomszédos mintermeket!

# Szimmetrikus függvények egyszerűsítési szabályai (folyt.)

- **DEF**: A *kanonikus* szimmetrikus függvények nem tartalmaznak szomszédos mintermeket, mert csak egy szimmetria számuk van, tehát <u>nem egyszerűsíthetők.</u>
- **DEF**: *nem egyszerűsíthetők* azok a szimmetrikus függvények sem, amelynek bármely két szimmetria száma közötti különbsége nagyobb 1-nél.
  - **DEF**: (következmény). Ha egy függvénynek van legalább két olyan szimmetria száma, amelyek közötti különbség 1, akkor ezeknek megfelelő mintermek között biztosan van szomszédos, tehát <u>*egyszerűsíthető*</u>.

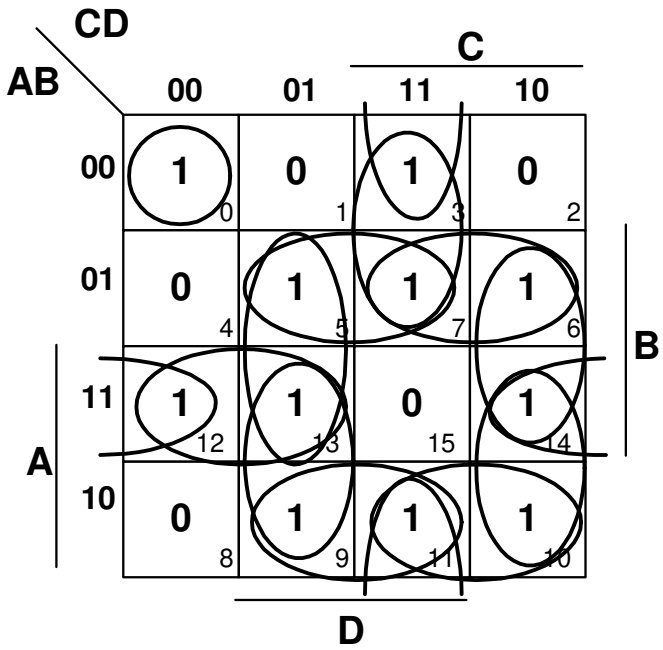
# Példa: szimmetrikus fgv. egyszerűsítése

$$S^4_{0,2}(A,B,C,D)$$




Nem egyszerűsíthető!

$$S^4_{0,2,3}(A,B,C,D)$$




Egyszerűsíthető: pótlólagos 3-as szimmetria szám miatt 2-es hurkok alakíthatók és vonhatók össze!

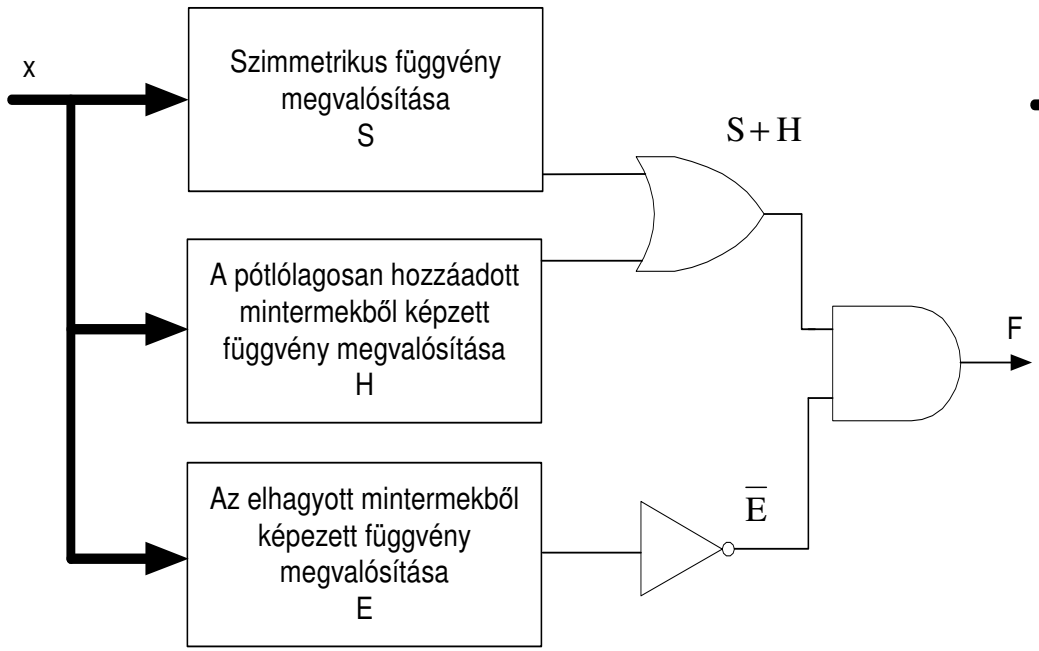


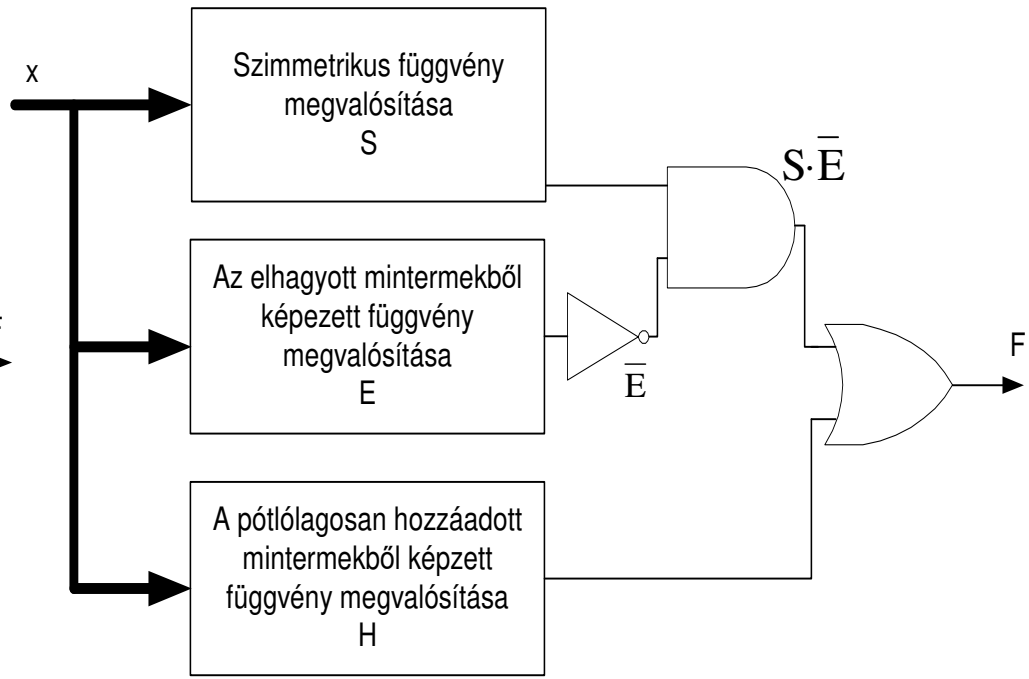
(Példa levezetése: Lapokon)

# **Általánosan**: szimmetrikussá tehető TSH/NTSH függvény minimalizálása

$$F = (S + H) \cdot \overline{E}$$

$$F = S \cdot \overline{E} + H$$

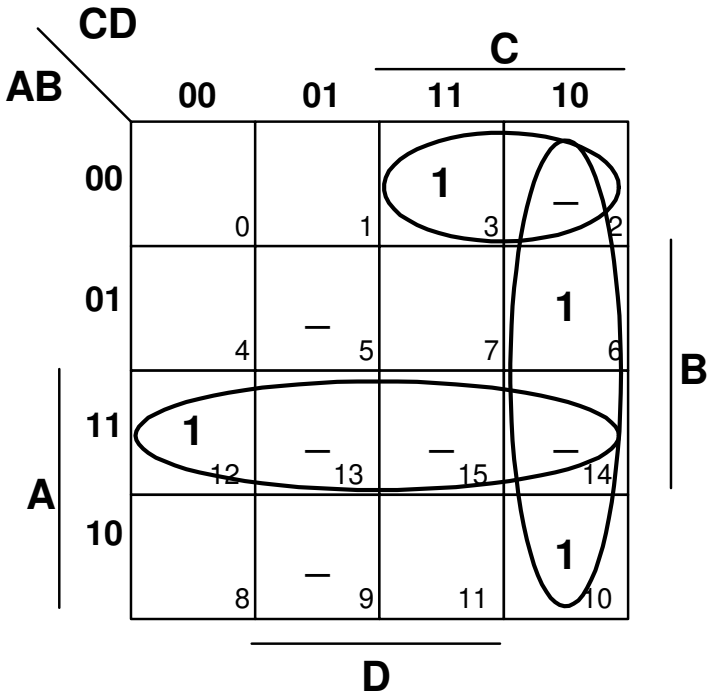



**Mintermek elhagyásával (E), ill. hozzáadásával (H) szimmetrikus függvényként kifejezett F függvény megvalósításának általános felépítése.**

# Példa-1: NTSH függvény (F) minimalizálása szimmetrikus függvénnyel történő kifejezéssel

$$F^{n=4}(A,B,C,D) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (3,6,10,12),(2,5,9,13,14,15)$$




**Kérdések: A don't care értékek megfelelő rögzítésével az adott F függvény *kifejezhető-e* szimmetrikus S fgv. segítségével (akár F-nek megváltoztatásával is)?**

**Az így adott S szimmetrikus függvénnyel nem egyszerűbb-e kifejezni az F-fgvt, mint az F legegyszerűbb DNF alakjával?**

S legyen adott: $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

**Intuitív/próbálgatásos módszer.**

A legegyszerűbb DNF alakból megadható a lehetséges elvi kapcsolási rajz!
(Arató könyv: 2.56. ábra – 95. oldal)

# Példa-1: NTSH függvény (F) minimalizálása szimmetrikus függvénnyel történő kifejezéssel

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 (3) | -/0 (2) |
| 01 | 4 | -/1 (5) | 7 | 1 (6) |
| 11 | 1 (12) | -/0 (13) | -/0 (15) | -/0 (14) |
| 10 | 8 | -/1 (9) | 11 | 1 (10) |

**1. Lépés: A don't care értékek megfelelő rögzítésével szimmetrikussá tehető-e?**

? helyett '1' kellene, hogy álljon ahhoz, hogy F-et egy szimmetrikus függvénnyel kifejezhessük $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

Tehát az S függvényhez bizonyos esetekben pótlólagosan hozzá kell venni, illetve el kell hagyni bizonyos mintermeket, hogy megkapjuk a kiindulási F-et. (A hozzáadást '**h**'-val az elvételt '**e**'-vel jelöljük).

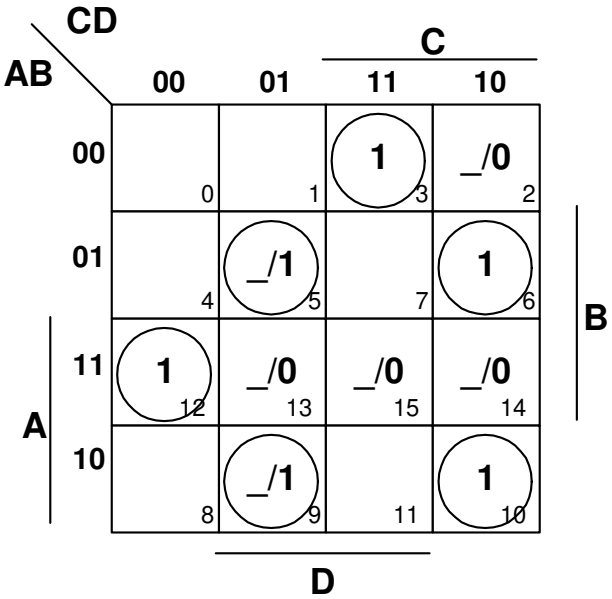
* $$F^4(A,B,C,D) = \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D) + H(A,B,C,D)\right] \cdot \overline{E(A,B,C,D)}$$

Ahhoz, hogy a kiindulási F függvényt megkapjuk, az S szimmetrikus függvény értékéből úgy állítjuk elő, hogy pótlólagosan '1'-et biztosítunk a hozzáadott mintermeknek megfelelő függvénynek (H), és ezt VAGY-oljuk, majd pedig megtiltjuk/tagadjuk az '1' értéket az elvett mintermeknek megfelelő függvényeknél (E), és ezt pedig ÉS kapcsolatba hozzuk az S szimmetrikus függvénnyel

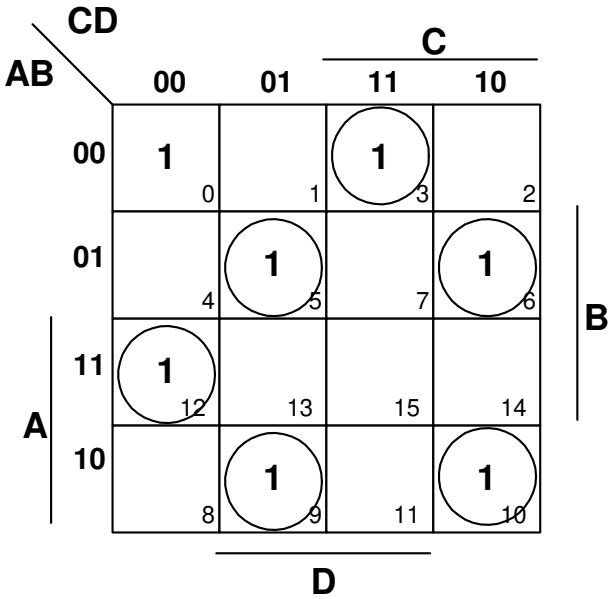
* Arató P. Logikai Rendszerek tervezése könyvben máshogy szerepel

**Rögzítsük a don't care-eket F-ben (ami közös S-el):**

**Szimmetrikus függvény:** $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$



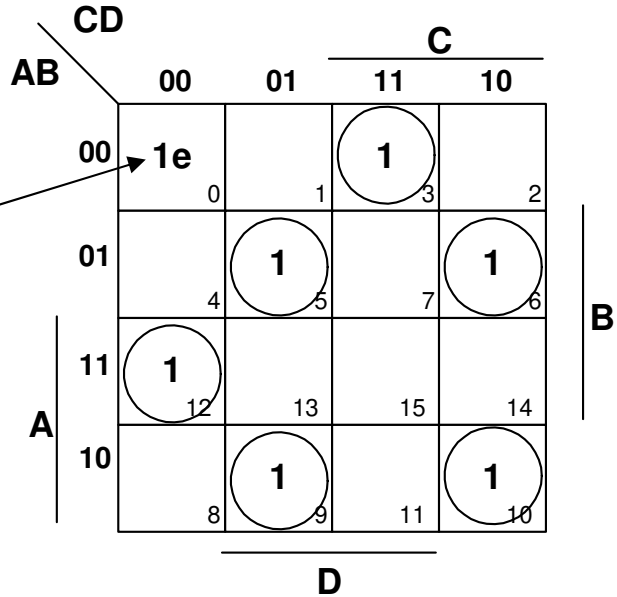

O: így kialakítható közös '1'esek (F és S között)

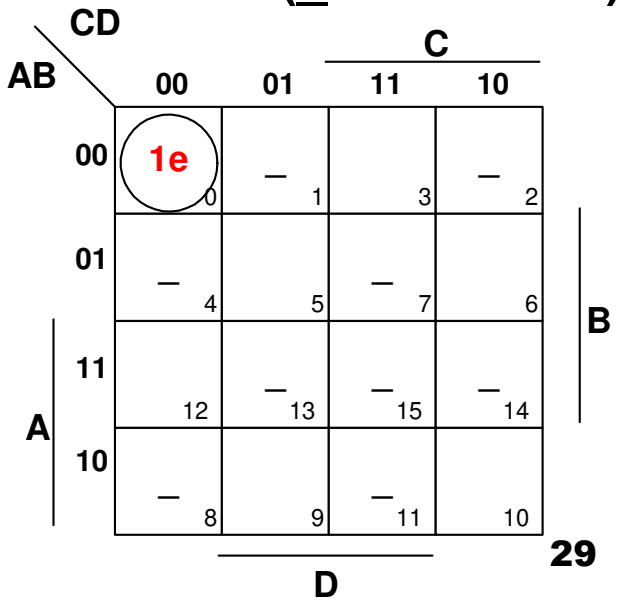



$$F = (S + \cancel{H}) \cdot \overline{E} = S \cdot \overline{E}$$

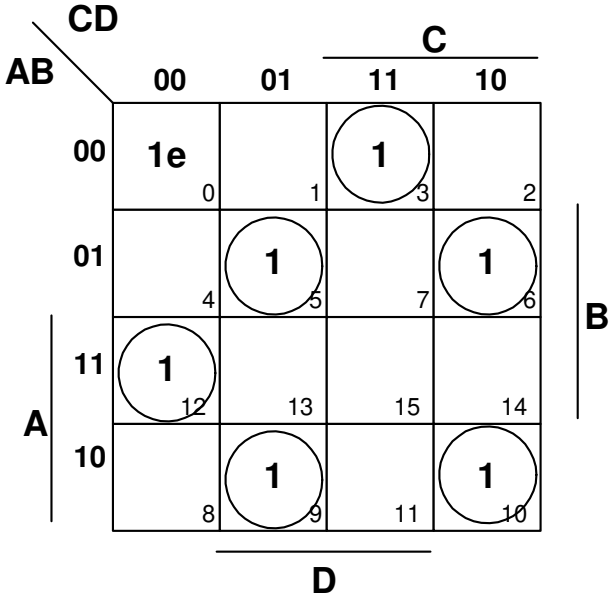
**E: ahol F='0' volt (_: dont'Care)**

**Itt: Nem kellett pótlólagosan S-hez hozzáadni, csak elvenni!**



# Példa-1 (folyt): szimmetrikussá tehető NTSH függvény minimalizálása




**A don't care értékek megfelelő rögzítésével F-et kifejeztük szimmetrikus S függvénnyel.**

E:.az **e**lhagyott mintermek logikai összegéből (DNF) alkotott fgv.

//H: a pótlólagosan **h**ozzáadott mintermek logikai összegéből (DNF) alkotott fgv.//

A pótlólagos '1' értékek biztosításának illetve tiltásának a <u>sorrendjét</u> (szorzás és összeadás) az elhagyandó és hozzáadandó **mintermek kialakításától függően** lehet csak felcserélni:

$$F^4(A,B,C,D) = \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) + \cancel{H(A,B,C,D)} \right] \cdot \overline{E(A,B,C,D)}$$

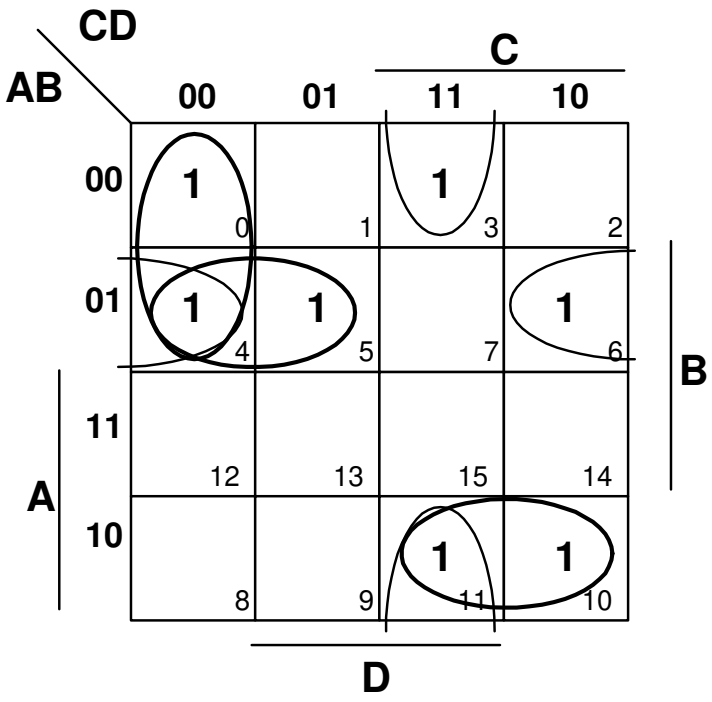
$$\equiv S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{E(A,B,C,D)} = S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$$

# Példa-2: szimmetrikussá tehető TSH függvény minimalizálása

- Hasonlóan kell eljárni mint az NTSH hálózatok esetén, kivéve hogy nem kell a don’t care értékeket (mintermeket) megválasztani.
- Hasonlóan fejezzük ki F-et a szimmetrikus S függvény (építőelem) segítségével úgy, hogy S-hez mintermeket adunk hozzá (h), illetve mintermeket veszünk el (e).

# Példa 2: TSH függvény (F) minimalizálása szimmetrikus függvénnyel történő kifejezéssel

$$F^{n=4}(A,B,C,D) = \sum_{i=0}^{2^n-1}(0,3,4,5,6,10,11)$$



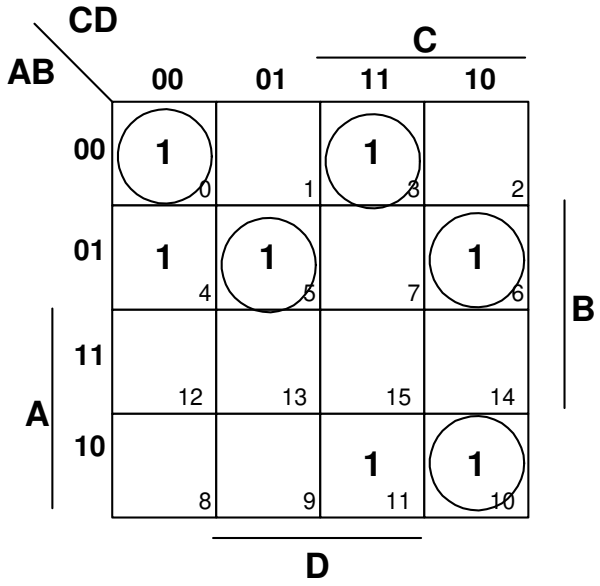

**Kérdések: Adott F függvény *kifejezhető-e az adott* szimmetrikus S fgv. segítségével (akár F-nek megváltoztatásával is)?**

**Az így adott S szimmetrikus függvénnyel nem egyszerűbb-e kifejezni az F-fgvt, mint az F legegyszerűbb DNF alakjával?**

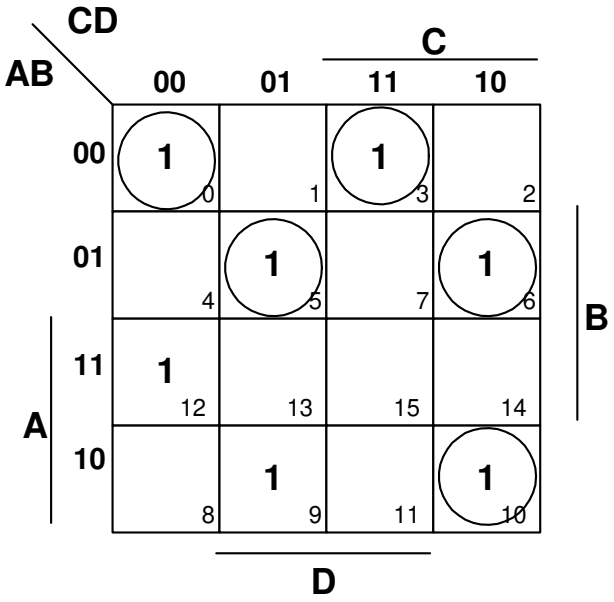
S legyen adott: $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

**Intuitív/próbálgatásos módszer.**

**Rögzítsük az ‘1’-es értékeket F-ben (ami közös S-el):**

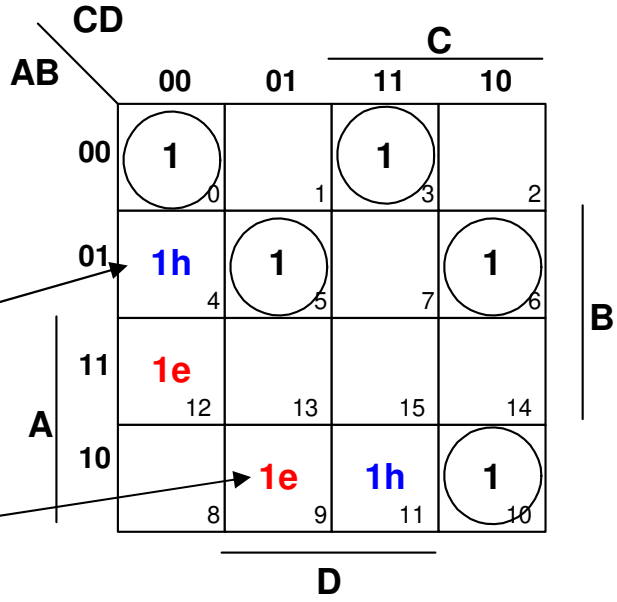



**Szimmetrikus függvény:** $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$




O: így kialakítható közös ‘1’esek (F és S között)

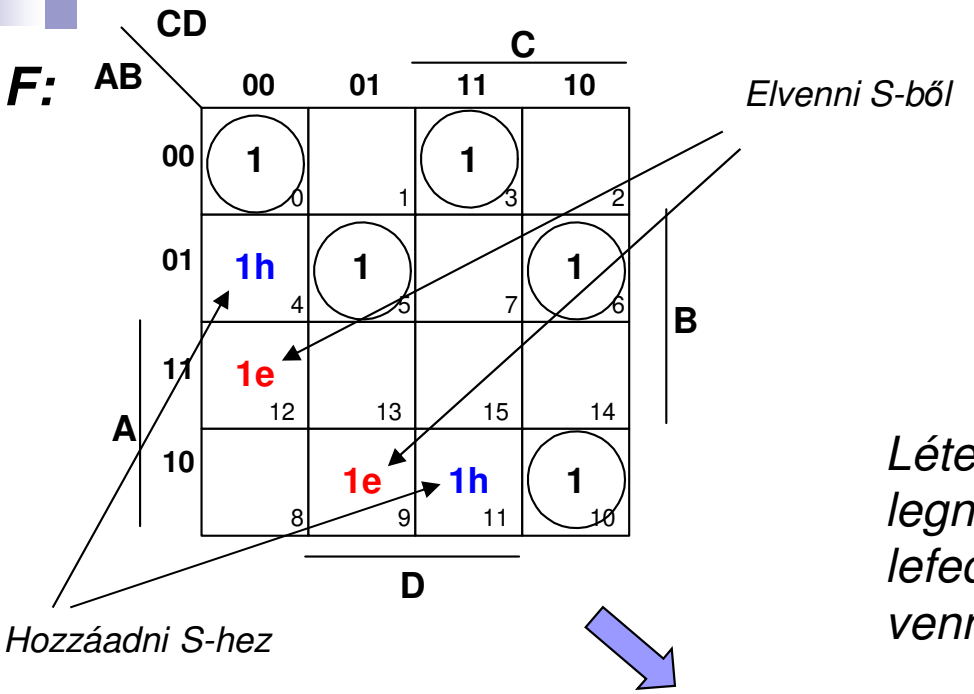
$$F = (S + H) \cdot \overline{E}$$




**Itt kellett pótlólagosan S-hez hozzáadni 1-et (h), illetve elvenni ‘1’-et (e)!**

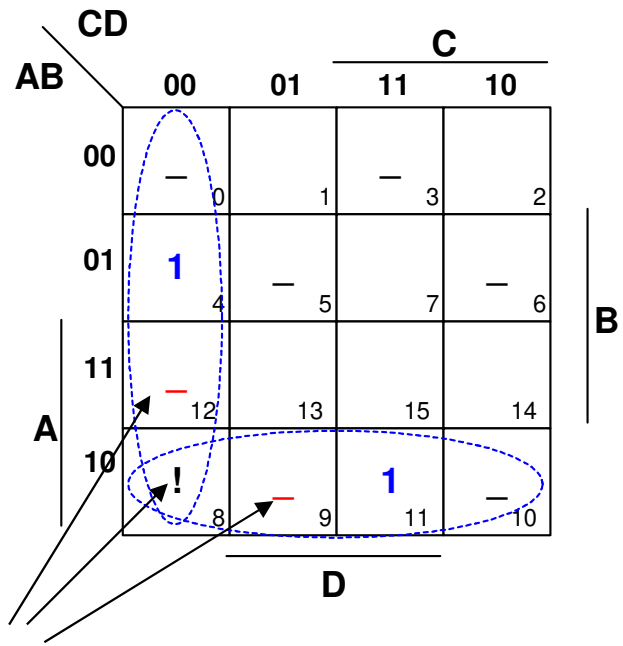
***Folyt. Köv oldalon***

**F:**



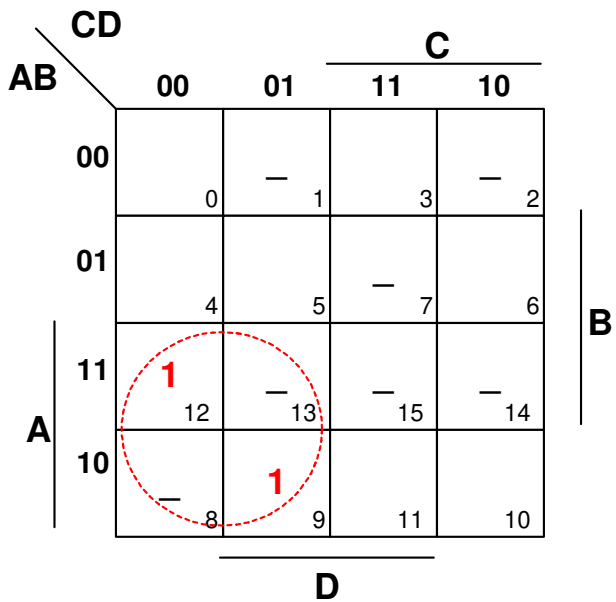

*Létező legnagyobb lefedéseket kell venni*

**H: (ahol F=‘1’ volt, oda _-t írunk)**




*Ez csak E miatt lehet 1 (összevonás)*

**E: (ahol F=‘0’ volt, oda _-t írunk)**




**I. Megoldás: F kifejezése S-el (számít a sorrend! H -> E)**

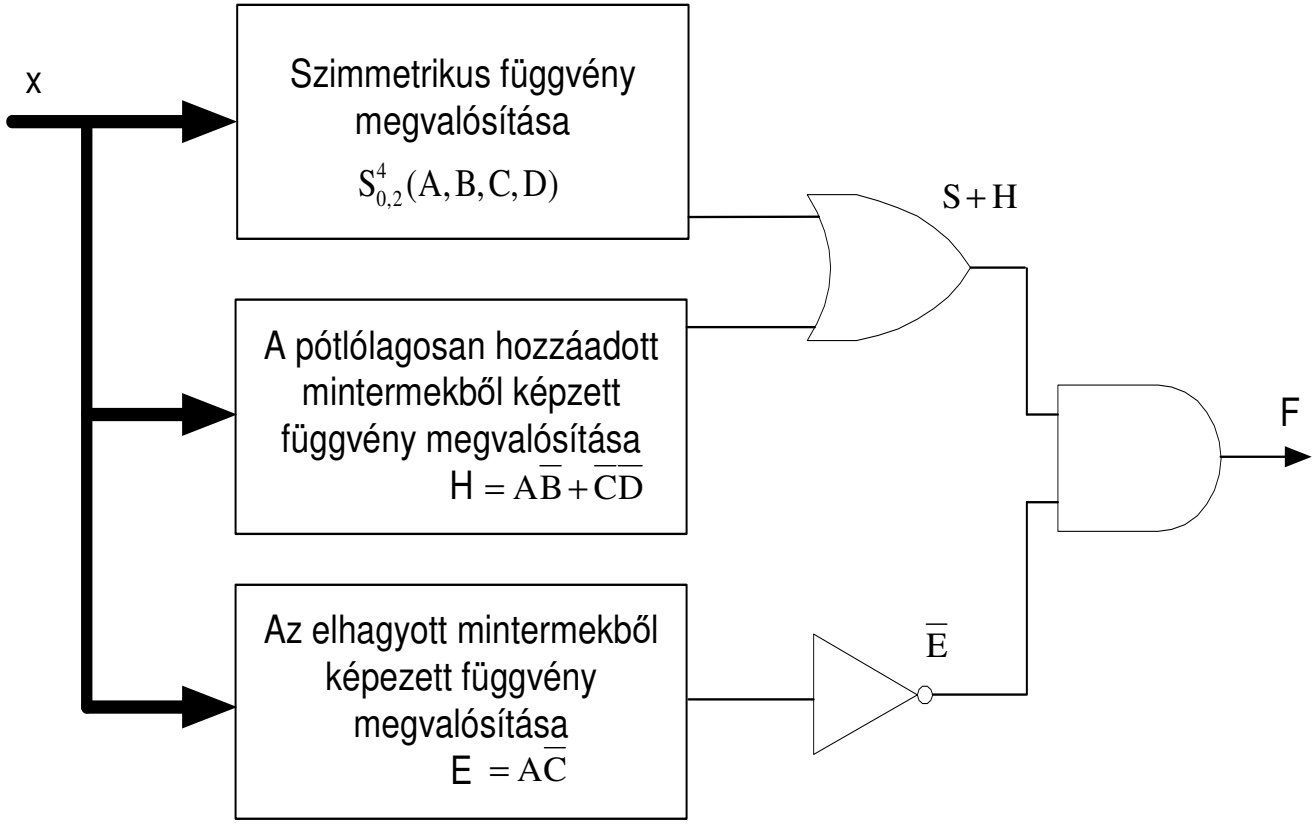
$$F^4 = \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) + H \right] \cdot \overline{E} =$$

$$= \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) + (A\overline{B} + \overline{C}\overline{D}) \right] \cdot \overline{A\overline{C}}$$

# Példa 2 (folyt): elvi logikai rajz

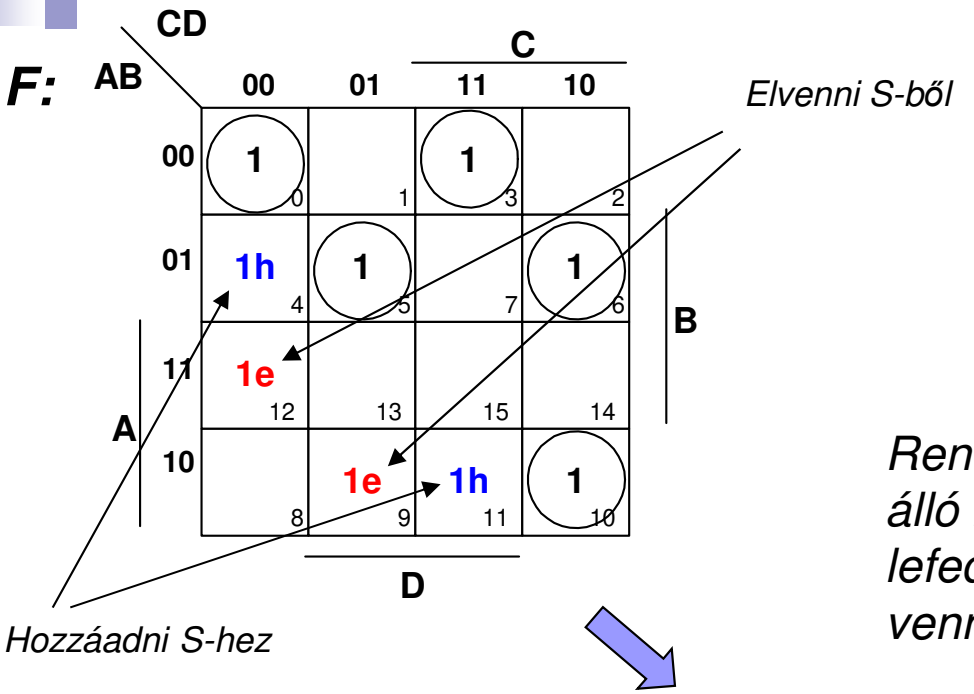
## I. módszer szerint

$$F = (S + H) \cdot \overline{E} = \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) + (A\overline{B} + \overline{C}\overline{D}) \right] \cdot \overline{A\overline{C}}$$



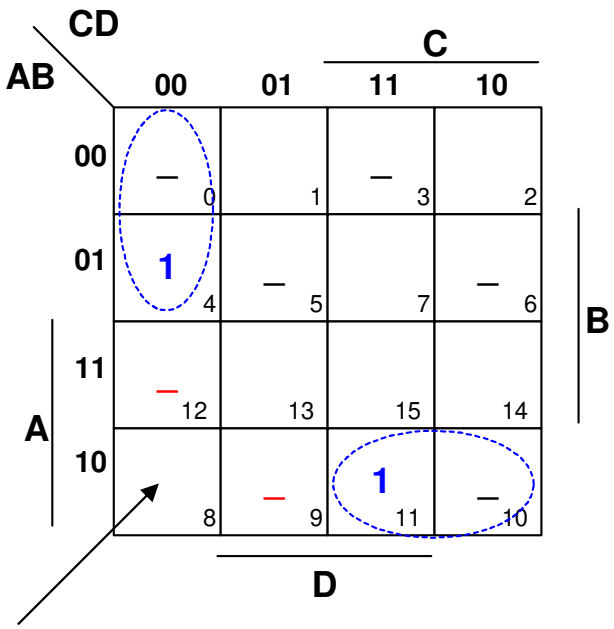

**Mintermek hozzáadásával (H), ill. elhagyásával (E) szimmetrikus függvényként kifejezett F függvény megvalósításának felépítése.**

**F:**



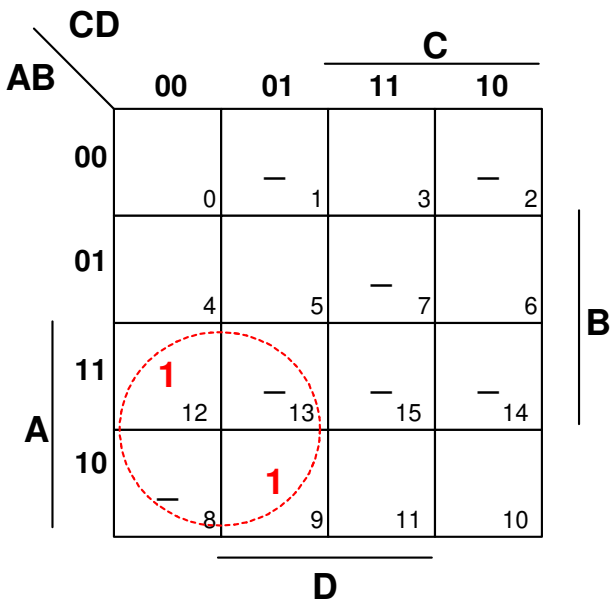

*Rendelkezésre álló legnagyobb lefedéseket kell venni*

**H: (ahol F=‘1’ volt, oda _-t írunk)**




*Ez csak E miatt lehet 1 (összevonás)*

**E: (ahol F=‘0’ volt, oda _-t írunk)**




**II. Megoldás: F kifejezése S-el (számít a sorrend! E -> H)**

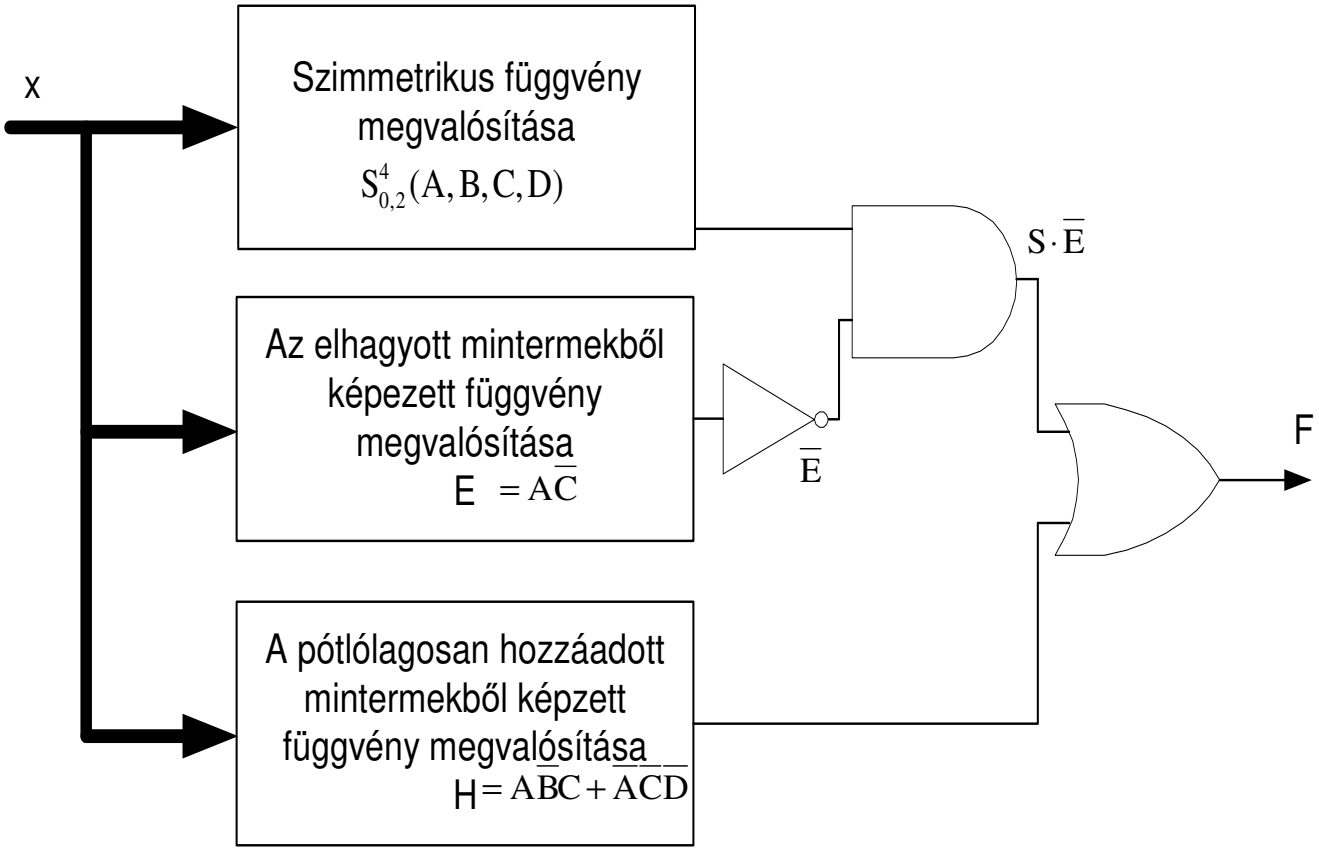
$$F^4 = \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{E} \right] + H =$$

$$= \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{A\overline{C}} \right] + (A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})$$

# Példa 2 (folyt): elvi logikai rajz

## II. módszer szerint

$$F = (S \cdot \overline{E}) + H = \left[ S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{A}\,\overline{C} \right] + (A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})$$




**Mintermek elhagyásával (E), ill. hozzáadásával (H) szimmetrikus függvényként kifejezett F függvény megvalósításának felépítése.**

# Példa-2: Melyik módszer az optimálisabb ?

- I. módszer:

$$F = (S + H) \cdot \overline{E} = \left[ S_{0,2}^{4}(A, B, C, D) + (A\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}) \right] \cdot \overline{A\,\overline{C}}$$

- II. módszer:

$$F = (S \cdot \overline{E}) + H = \left[ S_{0,2}^{4}(A, B, C, D) \cdot \overline{A\,\overline{C}} \right] + (A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})$$

# Új módszer: Bináris súlyok

(kevésbé intuitív keresés legyen szükséges az egyszerűsítéshez!)

- Eddig: próbálgatásra volt szükség.
  - Sok változó esetén (n>4) már nem szemléletes a Karnaugh tábla sem a szimmetrikus függvény megkeresésére.
- Ezért megfelelő *analitikus* módszer kell.
  - Alapja: **szimmetria szám**, mint **bináris** súly

# Új módszer (folyt.)

- A ***szimmetria számok*** a függvényben szereplő mintermeknek megfelelő bináris kombinációk ***bináris súlyait*** definiálják.
- **Vizsgálati módszer (bináris súly előfordulása):** Ha egy függvény szimmetrikus, akkor az adott szimmetria számnak megfelelő bináris súlyt jelentő összes képezhető mintermet tartalmazza.
  - Ha változók száma *'n'*, és a szimmetria szám *'k'*, akkor a szimmetrikus függvény tartalmazza az összes képezhető ***k-értékű bináris súlyt képviselő n változós mintermet,*** azaz (kombinációjukat):

$$S^{n}_{k,\ldots} \qquad C^{n}_{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Példa: szimmetrikus függvény új módszer szerinti felírása

- Adott a következő F fgv. DNF alakban:

$$F^{n=5}(A,B,C,D,E) = \sum_{i=0}^{2^n-1}(3,4,8,12,13,14,17,18,23,27,28)$$

- Kérdés: felírható-e ‘F’ szimmetrikus függvény alakban?
  - Táblázat: változók és bináris súlyaik felírása a DNF alapján
  - Majd a táblázat alapján a bináris súly előfordulásának feltételét kell megvizsgálni.

# Példa (folyt): szimmetrikus függvény

## új módszer szerinti felírása

| minterm | A | B | C | D | E | Bináris súly |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | #2 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | #1 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | #1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | #2 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | #3 |
| 14 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | #3 |
| 17 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | #2 |
| 18 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | #2 |
| 23 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | #4 |
| 27 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | #4 |
| 28 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | #3 |
| #1/ #0 | 5/6 | 6/5 | 6/5 | 5/6 | 5/6 | |

Bináris súlyok előfordulása (kombináció):

***#1 bináris súly:***

$$C_1^5 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5 - \text{ször}$$

***#2 bináris súly:***

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10 - \text{szer}$$

***#3 bináris súly:***

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10 - \text{szer}$$

***#4 bináris súly:***

$$C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5 - \text{ször}$$

***Egyik előfordulás sem teljesül a tábl. alapján!***

# Példa (folyt): szimmetrikus függvény új módszer szerinti felírása

- Amennyiben az előfordulások nem teljesültek:
  - Ez még nem jelenti azt, hogy a függvény nem tehető szimmetrikussá (ez a módszer nem vezet célra),
  - Ekkor kell a korábbi módszert alkalmazni.
- Lehetőség: bármely független változó(ka)t felcserélve a kimeneti függvény változatlan marad.
  - Szimmetria esetén minden (itt példában n=5 ) változónak azonos számmal kell ponáltan, ill. negáltan előfordulnia a DNF alakban.
  - Az előző táblázatban a törtszámok sem azonosak (#1/ #0)! De a (x/y) 6/5 felírható az (y/x) 5/6 reciproka-ként, ami a bináris súlyokat tekintve annyit tesz, hogy tagadjuk a megfelelő független változókat, azért, hogy az #x/#y törtszám azonosság fennálljon.
    - Változtassuk, negáljuk meg B és C független változók értékét: változik a bináris súly -> kiszámolni

# Példa (folyt): szimmetrikus függvény

## új módszer szerinti felírása

| minterm | A | $\overline{B}$ | $\overline{C}$ | D | E | Bináris súly |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | #4 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | #1 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | #1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | #0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | #1 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | #1 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | #4 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | #4 |
| 23 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | #4 |
| 27 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | #4 |
| 28 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | #1 |
| #1/ #0 | 5/6 | 5/6 | 5/6 | 5/6 | 5/6 | |

Bináris súlyok előfordulása (kombináció):

***#0 bináris súly:***

$$C_0^5 = \binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = 1 - \text{szer}$$

***#1 bináris súly:***

$$C_1^5 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5 - \text{ször}$$

***#4 bináris súly:***

$$C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5 - \text{ször}$$

***Most már mindegyik előfordulás teljesül a táblázat alapján! → 'F' Szimmetrikus***

# Példa (folyt)

- F felírása szimmetria alapján:

$$F^5(A,B,C,D,E) = S^5_{0,1,4}(A,\overline{B},\overline{C},D,E)$$

- Megjegyzés: a táblázatban lehetett volna a B,C változók helyett az A,D,E változókat is tagadni természetesen (5/6 -> 6/5 átalakítással). Ekkor, ahogy várjuk a kapott függvény negáltját kapjuk (4-es szimmetria tulajdonság alapján):

$$F^5(A,B,C,D,E) = S^5_{0,1,4}(A,\overline{B},\overline{C},D,E) \Leftrightarrow S^5_{1,4,5}(\overline{A},B,C,\overline{D},\overline{E})$$